DELLA ESTIMAZIONE
DELLE
FORZE VIVE,
DISSERTAZIONE
FISICO-MATEMATICA
DEL PADRE
D. GIOVANNI
CRIVELLI
SOMASCO.

DELLA ESTIMZION
DELLE
FORZE VIVE,
DISSERTAZIONE
FISICO-MATEMATICA.

La quiſtione intorno le Forze Vive ſebben non è nata tra Noi, e non è poco tempo che ferve, non fu però ancora dichiarata, ſicchè ſiano ridotti a concordia i Filoſofi, e ſiano levati tutti quei diſpareri, ne' quali fin ora ſono ſtati diviſi. Ella dura ancora dopo che il Sign. Leibnizio fu il primo ad eccitarla negli Atti di Lipſia 1686. Avanti di eſſo tutti i Floſofi ſeguivano il Sig. des Cartes, che tutti i Fenomeni del moto alla *quantità ſola dello ſteſſo moto* riduſſe: chiamata per queſto la *vera Forza motrice*, la cui miſura da due principj dipende, e dalla maſſa che ſi muove, e dalla velolocità con cui si muove; onde se la massa si dica M, e la velocità U, la quantità del moto ovvero la forza, con cui la detta massa si muove sia sempre eguale a MU, onde come da prima ed unica causa dipendono tutti gli effetti del moto. Ma osservò il Leibnizio doversi distinguere due diversi stati di corpi in natura. Il primo è di quelli che certamente sono in quiete, ma vengono però continuamente sollecitati da una forza che tende sempre a muoverli, ma non può muoverli, perchè è sempre impedita, e'l secondo è di quelli, che sono in moto attuale, e percorrono determinati spazj con quella determinata velocità, che hanno ricevuto dal loro movente. Doversi perciò distinguere due forze l'una che continuamente sollecita un corpo quieto, ma senza muoverlo, perchè la sua azione, è sempre impedita, e si può dire *Pressione*, *Potenza*, *Sforzo*, *e Forza Morta*, e l'altra che nel Mobile esiste intrinsecamente comunicata, da' cui gradi maggiori, o minori dipende la maggiore, o la minore velocità, con

cui

cui il Mobile suddetto si muove, e questa si può dire Forza *inerente, impressa, intrinseca*, e *Forza viva*. Potersi considerare la prima forza in un peso, che senza moto si poggia sopra un piano fisso orizzontale, e tende di continuo a discendere, ma non discende per la continua opposizione del piano. Ma se si leva il piano, incomincia tosto il peso a discendere con moto attuale per cagion della gravità, che aggiugne sempre nuovi stimoli, e fa che il peso scenda sempre più veloce, e veloce, ed allora il peso è costituito nella seconda forza attuale, e viva, con cui è capace di vincere quegli ostacoli, che se gli oppongono, e comunicar altrui movimento. La prima forza si conosce ancora in un sostegno d'un fiume, il quale è presso dall'acqua, che l'urta. Ma se l'acqua colla sua forza viva seco rapisce il sostegno, allora in quello sta la seconda forza, che viva ancor essa si appella. Non doversi dubitare, che tali forze in natura da infinite altre osservazioni non possono distinguersi; chiaramente conoscersi esser quelle molto tra sè diverse. Imperocchè se si cercano le loro misure, ritrovarsi che la prima consiste nella massa, e nella velocità che nel primo minimo tempo dee dalla Forza morta ricevere, ch'è lo stesso che una quantità di moto non *attuale*, ma *virtuale*; e la seconda consiste nella massa, e nel quadrato della velocità attuale, ma non nella semplice attuale velocità, come vuole il Cartesio.

Cercò il Sign. Papino Professore di Marburgo di opporsi a questa dottrina negli Atti di Lipsia 1689., e molti contrasti si fecero tra lui e il Leibnizio. Non aver egli difficoltà, che si distinguano tali forze, benchè in rigore tutti i Fenomeni ad una sola possano ridursi, che quando preme, e non muove, si può dire *Forza morta*, ma quando agisce, e si comunica ad un Mobile, si può dir *Forza viva*; ma doversi vedere se le proporzioni Leibniziane son giuste, e se la morta sia nella ragion semplice delle velocità virtuali, e la viva nella duplicata, come il Sign. Leibnizio.

In-

Incominciò il dottiſſimo Ermano a maneggiare tale quiſtione con lettere private ſcritte dal P. Ab. Grandi celebre Profeſſore di Piſa nel 1709. Uſcite poi le lettere del Sign. Clarche, e del Sign. Leibnizio in Inghilterra, principiò a farſi la materia più famoſa, ed uno de' primi a dichiararſi in favore del Leibnizio fu dopo 28. anni l'acutiſſimo Signor Giovanni Bernulli nel diſcorſo intorno le leggi del moto, che meritò gli elogj dell'Accademia Reale di Parigi, dopo cui ſpoſarono tale dottrina anche i dottiſſimi Criſtiano Wolfio, e Marcheſe Poleni, ed uſcirono le diſſertazioni dell'Ermano, del Bulfingero, e di Daniello Bernulli ne' Comentarj dell' Accademia di Petroburgo Tom. I. Dall'altra parte non mancarono chiariſſimi Uomini, che il principio Carteſiano ſoſtennero, i quali nell' Accademia di Parigi furono il Sign. Fontanelle, il Sign. de Mayran, il Sign. Ab. Comus nel 1728., il Cav. de Louville nel 1729., il Sign. Pemberton, e il Sign. Deſaguliers in Inghilterra, il Sign. de Crouſatz in Ollanda, ed altri molti, che con molto ingegno si opposero.

Vostra Eccellenza richiede in tal materia il mio sentimento. Io lo darò liberamente. Nella dottrina dei Leibniziani io non niego, che non vi siano molti argomenti robusti, e forti, che possono almeno porre in ambiguo gl' ingegni più acuti, e penetranti; ma se sono ben esaminati, dico ancora, che sono soggetti a tali difficoltà, che certamente pare che non possano intieramente convincere, nè gettare a terra il Cartesiano Sistema. Io non ho in animo di esporre tutte le loro obbiezioni, perchè sarebbe troppo lunga, e nojosa l'opera, ma crederò bastante di esporle quelle, che sono più scelte, arrecando nello stesso tempo le loro risoluzioni; il che farò colla maggior chiarezza, ch' io possa, perchè Ella col suo sommo ingegno, con cui è solita superar le cose più ardue, possa ben bilanciare, l'uno, e l'altro Sistema, e determinarsi a ciò che le parerà più conveniente.

AR-

ARGOMENTO I.

IL primo argomento, ſul quale il Sign. Leibnizio fondò la ſua dottrina è preſo dalla caduta de' Gravi . Sia un grave A , la cui maſſa è 4 , e diſcenda da altezza 1 ; egli per le dottrine del Galilei acquiſterà una forza di riſalire nel medeſimo tempo alla medeſima altezza 1 . Sia un altro grave , la cui maſsa è 1 , e diſcenda da altezza 4 ; egli avrà una forza di riſalire nel medeſimo tempo ad altezza 4 . Ma ſecondo lo ſteſso Carteſio tanta forza vi vuole per alzar maſsa 1 ad altezza 4 , quanta per innalzar maſſa 4 ad altezza 1 . Saranno dunque di tali gravi eguali le forze , ed amendue eguali a 4 . Ma per Galileo la velocità acquiſtata dal ſecondo grave è 2 . Dunque velocità 2 produrrà una forza 4 , e perciò la forza ſarà come il quadrato della velocità , e non come la velocità , ſecondo che vogliono i Carteſiani .

RISPOSTA.

MA a tale argomento abbastanza già è stato risposto, non doversi paragonar tali forze per mezzo degli spazj in diverso tempo percorsi, ma per mezzo di quelli, che si percorrono nel medesimo tempo. Il principio del Cartesio esser vero, ma parlar egli de' corpi alle macchine applicati, ne' quali gli spazj sono in egual tempo percorsi, non essendovi dubbio, che per far equilibrio in un Vette i pesi debbono essere tra sè in ragion reciproca delle distanze del punto fisso, mentre si ricerca la stessa forza a movere per un'altezza 4 un corpo 1, che per un' altezza 1 un corpo 4.

Per determinar la forza de' gravi, che ascendono, o che discendono, osserva il Sign. Cav. de Louville, ed il Sign. de Mayran doversi ridurla alla uniforme. Essere già dimostrato dal Galilei, che se un grave nel risalire conserva quella velocità, che ha acquistata cadendo, in quello stesso tempo, in cui è disceso, percorcorre un doppio ſpazio aſcendendo. Dunque ſe un corpo A ſarà diſceſo da altezza 1 in tempo 1, riſalendo egli con moto uniforme percorrerà nel medeſimo tempo ſpazio 2. Se un altro corpo B in tempo 2 diſcenderà da altezza 4, egli nella riſalita uniforme percorrerà nello ſteſſo tempo ſpazio 8. Saranno dunque tali ſpazj come 1 : 4. Ma eſſendo i tempi come 1 : 2, tali ſpazj non doveranno prenderſi per la miſura di tali forze. In tempi eguali gli ſpazj ſono come 1 : 2, ed in tal ragione ſaranno le forze, cioè come le velocità, e non come i quadrati.

Gli altri argomenti non ſono più convincenti; e per queſto poco ſi ſervì di eſſi il Sign. Giovanni Bernulli, Leggi del movimento. ,, *C'eſt n'eſt pas, que les preuve de M. Leibnitz m' ayent parûes aſſez fortes pour me determiner a embraſſer ſon ſentiment, car j'avoüe qu' etant indirectes, & nullement tirèes du fond de la matiere, dont il s' agiſſoit, elles ne pourrent me convaincre, mais elles me donnerent occaſion d' y penſer, & il n' eſt que après une* *longue, & serieuse meditation, que j'ai trouvè enfin le moyen de me convaincre moi même par des demonstrations directes & au dessus de toute exception.*

ARGOMENTO II.

IL chiarissimo Ermano nella sua Foronomia pagina 58. osserva, che l'effetto d'una forza costantemente applicata altro non può essere, che la velocità impressa nel mobile per tutto il tempo, in cui si fa l'azione, e perciò se la forza si dica f, il mobile m, la velocità impressa u, e il tempo dell'azione t, si avrà $f = \frac{mu}{t}$ la qual formula non è differente da quella del Sign. Newton, per cui posto lo spazio s, e sostituendo s invece di u, si ha $f = \frac{ms}{tt} = \frac{mu}{t}$.

Differenziando dunque la suddetta formula si avrà $fdt = mdu$. E perchè come nota il celebre Varignon, se si prende s per lo spazio, e si ponga il tempo costante, sarà $\frac{ds}{dt} = u$, e per-

ciò

ciò $\frac{ddz}{dt} = du$,: ſoſtituito queſto valore nella ſuddetta formula ſi avrà $fdt^2 = mddz$; onde integrando due volte ſi avrà $ftt = mz$, come prima.

Di tale formula ſi ſervì il dottiſſimo Giovanni Bernulli per dimoſtrar la proporzione Leibniziana . Imperocchè ſiano due ſerie d'elaſtri eguali, ed egualmente teſi , la prima delle quali ſia compoſta di 12 elaſtri la ſeconda di 3 , e ſiano le loro eſtremità ſoſtenute per una parte da' piani fiſſi A, e B, e per l' altra da' due corpi L e P tenuti in equilibrio dalle potenze R ed S. (Fig. 6.) E perchè gli elaſtri ſono egualmente teſi, i due corpi L , e P riceveranno eguale preſſione , e perciò le potenze equilibranti R ed S ſaranno eguali. Se ſi levino tali potenze, allora gli elaſtri intali potenze, allora gli elaſtri incominceranno a diſtenderſi , e ſi comunicherà un moto accelerato a' corpi L , e P , nel qual moto è coſa evidente , che ſarà comunicata maggiore velocità da dodeci elaſtri al corpo L , che da tre ſoli al corpo P.

Se ſi vogliono ſtimare le forze

impresse in tali corpi, non v'è da dubitare, ch'elle non siano, come il numero degli elastri, che l'hanno impresse. Imperocchè essendovi in ciascun elastro una eguale azione, è necessario ancora, che ciascun imprima un'egual forza. Sarà dunque la forza impressa in L alla forza impressa in P come 12 : 3, cioè come 4 : 1 = n : 1

Si cerchi ora la ragion delle velocità, e siano perciò le due rette AC, BD, che rappresentino due serie d'elastri eguali, ed egualmente tesi, all'estremo de' quali siano due corpi eguali D, e C, che nello aprirsi degli elastri si muovano in I ed F. Poste due curve DNK, CML, di cui le abscisse DH, CG esprimano gli allungamenti degli elastri, e le ordinate HN, GN le velocità acquistate da' corpi ne' punti H e G. Posta DN = x, HP = dx, HN = u, TO = du, sia CA = n BD, CG = nx, GE = ndx CM = z, DU = dz. Ed essendo gli elastri allungati fino in H e G in proporzione, resteranno ancora nella stessa ragione le loro elasticità, e perciò i corpi

Fig. 7.

pi C, e D riceveranno ancora pressioni eguali. Si dica p la pressione, e perchè per la legge de' moti accelerati pdt = du, si avrà $\frac{pdx}{u} = du$, cioè pdx = udu, ed integrando $\frac{uu}{2} =$ Spdx. Nello stesso modo si trova $\frac{zz}{2} =$ nSpdx. Dunque uu : zz = Spdx : nSpdx = 1 : n. Essendo dunque 1 : n la ragion delle Forze, saranno le forze uu : zz, cioè come i quadrati delle velocità, e non come le velocità.

Lo stesso colla stessa formula dimostra il celebre Sign. Daniele nell'esame de' principj Meccanici. Memorie di Petroburgo T. I.

RISPOSTA.

Benchè tale argomento sia uno de' più ingegnosi, resta sempre il dubbio, se debba prendersi la ragione di due forze in diverso tempo operanti. Imperocchè siano i tempi delle azioni degli elastri come t, e T, e perchè nel primo pdt = du, e nel secondo pdT = dz, sarà pdt :

pdT = du : dz = 1 : 2. Dunque 2 pdt = pdT ; onde si deduce 2 dt = dT, e perciò il tempo T doppio del tempo t. Lo sviluppo del primo elastro è allo sviluppo del secondo come 1 : 4 per la ipotesi. Dunque in tempi eguali saranno gli sviluppi come 1 : 2, e come gli sviluppi, così saranno le forze. Dunque la forza del secondo elastro sarà doppia della forza del primo; e perciò saranno come le velocità, e non come il quadrato.

Se il numero degli elastri del primo al numero degli elastri del secondo fosse come 1 : 9, le velocità sarebbero come 1 : 3, e così i tempi, in cui si compiono le azioni. Posti però i tempi eguali lo sviluppo del primo allo sviluppo del secondo sarà come 1 : 3, e così saranno le forze, e ciò in qualunque supposizione.

ARGOMENTO III.

UN altro de' più forti argomenti per comprovar la dottrina del Leibnizio sono le leggi, con cui comunicano il moto i corpi elastici.

Sia-

Siano due corpi elaſtici, che ſi percuotano inſieme con qualſivoglia direzione, ſe ſi prenda il quadrato della velocità d' amendue avanti l' urto, e ſi moltiplichi per le ſue reſpettive maſſe, indi ſi prenda il quadrato della velocità d' amendue dopo l' urto, e parimente ſi moltiplichi nelle ſue maſse: una delle leggi generali della comunicazione del moto è, che la ſomma di tali prodotti avanti l' urto ſia ſempre eguale alla ſomma de' medeſimi dopo l' urto. Tale legge nota già per gli Canoni fu dimoſtrata dall' Hughenio nel ſuo Trattato della percoſſa. Prop. II. *Duobus corporibus ſibi mutuo occurrentibus id quod efficitur ducendo ſingularum magnitudines in velocitatum ſuarum quadrata ſimul additum ante, & poſt occurſum corporum, æquale invenitur.*

Così ſe M = 2, U 3, m 1, u 1, la velocità di M dopo l' urto ſarà $\frac{5}{3}$, e quella di m $\frac{11}{3}$. Se ſiano moltiplicati i quadrati della celerità per le loro maſſe avanti l' urto, e dopo l' urto, ſi troveranno amendue le ſomme = 19.

Se

Se M = 1, U 4, m 2, u = 2, dopo l'urto U = − 4, u = 2. Prendendo, come di ſopra, le ſomme avanti, e dopo l'urto ſaranno le medeſime = 24, e ciò in qualunque ſuppoſizione.

Tal legge ſola baſterebbe per iſtabilire il Leibniziano Siſtema, non ricercandoſi di più per far conoſcere la natura delle forze motrici, ed in che ragione elle ſiano, e come nè l'una, nè l'altra non ſi diſtruggono, e ſe ſono diſtrutte, ſi riproducano, e paſſano di mobile in mobile, eſſendo ſempre le ſteſſe, ed immutabili.

Ciò può ſervire d'uno ſplendido argomento della immutabilità del Sommo Autore, dal cui volere, e poſſanza ella hanno avuto principio, e conſervano ſempre la loro ſuſſiſtenza. Il che non ſarebbe, ſe le forze foſſero, come vogliono i Carteſiani, ſecondo la quantità del moto. Imperocchè ognun ſa, che nell'urto de' corpi, le quantità del moto ora ſi fanno maggiori, ora minori, come nota lo ſteſſo Hughenio Prop. 6. *Corporibus duobus ſibi mutuo concurrentibus, non ſemper poſt impulſum eadem motus quantitas in*

utro-

utroque ſimul ſumpto conſervatur, quæ fuit ante, ſed vel augeri poteſt, vel minui.

Così ſe M $=$ 2, U 4, m 6, u 1. Dopo l'urto U $= -\frac{1}{2}$, u $= \frac{5}{2}$ Quantità del moto avanti l'urto $=$ 14. Dopo l'urto 16.

Per confermar maggiormente queſto principio oſſerva vagamente il dottiſſimo Ermano, che ſe un globo A $=$ 1 urta direttamente un altro globo eguale B e poſto in quiete, A perderà tutta la ſua forza, e B in tanto ſi avanzerà colla velocità 1. Se la velocità di A ſi fa 2, ed incontri un corpo quieto 3A, comunicherà al corpo urtato un grado della ſua velocità ed egli ritornerà indietro coll' altro grado, con cui incontrando un altro corpo eguale egli comunicherà il grado che gli reſtava, e perderà il ſuo moto. Se la velocità di A ſarà 3, ed incontri un dopo l'altro tre corpi 5A, 3A, 1A, egli comunicherà a ciaſcuno un grado della ſua velocità, dopo che reſterà immobile, e così ſeguitando, ſe ſi accreſca la ſua veloci-

tà

tà, potrà sempre comunicarne un grado a ciascun de' corpi, che procedendo per gli numeri impari formano la serie A. 3 A. 5 A. 7 A. 9 A............ Alle quali cose facendosi, leggiera attenzione, non è difficile il conoscere con qual legge proceda la forza di A, ed in conseguenza la forza Viva. Imperocchè se con velocità 1 può il corpo A comunicar tutta la sua forza ad un altro corpo eguale A, e con velocità 2 può muovere 3A † A, con velocità 3, 5A † 3A † A, e così seguitando, bisognerà concludere, che la forza motrice di A non è come la velocità, ma come il quadrato, essendo che con le velocità 1. 2. 3. 4. ha forza di muovere, e di comunicare un grado di velocità alle masse 1. 4. 9. 16. ......, e cos' in infinito. Onde può osservarsi l'analogia, che passa tra questo corpo, che urta, ed un grave, che ascende. Imperocchè sia tale corpo = A, e la sua velocità = U, e potrà prima di perdere la sua forza comunicare un grado di velocità alla serie de' corpi A. 3A. 5A. 7A....... fino che il numero de' termini =

U, e

U, e così un grave, la cui velocità per ogni ſpazio, poſta la ſerie degli ſpazj S. 3S. 5S. 7S. .... ſino che il numero de' termini = u.

Dunque come la forza de'gravi è ritardata uniformemente per una forza coſtante, qual è la gravità, che in tempi eguali toglie loro un egual grado di celerità, così ancora la forza de' corpi in moto ſarà in tal caſo uniformemente ritardata da una forza coſtante, ch'è la reſiſtenza de' corpi mobili, la quale toglie i gradi delle velocità al corpo movente econdo i numeri impari.

RISPOSTA.

CHe tale legge dell' Hughenio ſia ſempre coſtante non è da metterſi in dubbio; ma reſta bene da dubitare, ſe per cagione di tale coſtanza ſi debba ſtabilire per miſura delle forze il quadrato della velocità potendo per la ſteſsa ragione anche i Carteſiani ſtabilire egualmente il loro principio. Imperocchè ſia un corpo, che urta = 4 la cui velocità ſia 4, ed urti un dopo l'altro quattro cor-

pi

pi quieti $1 - 1 . 3 . 5 .$ e le velocità comunicate saranno $\frac{32}{5} . \frac{86}{25} . \frac{216}{125} . \frac{72}{125} .$

Egli è vero, che prendendo i quadrati delle velocità avanti e dopo l'urto col metodo dell' Hughenio, la loro somma sarà costante, ed eguale a 64. Ma è ancor vero, che predendo la semplice velocità col metodo del Cartesio, si troverà la stessa costanza, e la somma de' prodotti avanti e dopo l'urto sarà egvale a 16.

Il che essendo in ogni altra supposizione, dove le forze non sono contrarie, è cosa evidente, che la costanza delle forze in questa parte non concluderà . . . . più per lo sistema de' Leibniziani, che per quello dei Cartesiani. Se le forze sono contrarie non bisogna prender la loro differenza come una somma, e considerare il negativo, come se fosse positivo, nel modo in cui fanno i Leibniziani. Le forze contrarie si distruggono l' una coll' altra, e lo stabilire, che le forze si conservino sempre le stesse, e prenderlo per uno de' più forti argomenti

per

per dimoſtrar la Divina Immutabilità, è bene un'opinione plauſibile, ma non ſi vede, che convenga ſempre colla ſperienza, per cui veggiamo tutto giorno, come molte forze contrarie ſi ſtruggono, e non ritornano. Così nell'urto de' corpi molli due moti eguali, e contrarj ſi elidono, e diventano zero, e ſe ſono ineguali una parte elide l'altra, e ſopravive ſolo il loro eccesſo. Lo ſteſſo veggiamo farſi in un grave, che vibrato in alto con qualſivoglia forza, a poco a poco la perde per la continua azion della gravità, che ſi oppone, e l'obbliga in fine a diſcendere. Nè per queſto reſtano diminuite le ragioni per la Divina Immutabilità, eſſendo ella comprovata da una infinità d' altri argomenti, che dalle Leggi Fiſiche continuamente poſsono prenderſi, ognuna delle quali coſtante, e fiſsa baſta per far conoſcere a noi mortali e la ſapienza, e l'ordine eterno del Sommo Autore.

Per trovar dunque la forza dell' urto tanto ne' molli, quanto negli elaſtici biſogna elidere le contrarie, e ſommare le poſitive, e ciò che

vi

vi è di positivo avanti l'urto si trova ancor dopo l'urto.

Sia un corpo molle $M = 4$, $U = 3$, $m = 2$, $u = 1$. Dopo l'urto la velocità comunicata è $\frac{7}{3}$. La forza avanti l'urto era 14, e dopo l'urto $\frac{28}{3} + \frac{14}{3} = 14$.

Se $M = 4$, $U = 3$, $m = 2$, $u = -1$, la forza prima dell' urto $= 10$, la velocità comun dopo l'urto $= \frac{5}{3}$. Dunque la forza $= \frac{20}{3} + \frac{10}{3} = 10$.

Se sono elastici, ed $M = 1$, $U = 4$, in $= 3$, $u = 0$, la forza avanti l' urto $= 4$. U dopo l'urto $= -2$, ed $u = 2$. Dunque la forza dopo l'urto $= 6 - 2 = 4$.

Se $M = 3$, $U = 3$, $m = 2$, $u = -1$, sarà la forza prima dell' urto $= 7$. Dopo l' urto le celerità di M, ed m sono $-\frac{1}{5}$, e $\frac{19}{5}$. La forza dunque dopo l'urto $= -\frac{3}{5} + \frac{38}{5} = \frac{35}{5} = 7$.

A R-

ARGOMENTO IV.

PEr confermar maggiormente la legge Hugheniana, fece il Sign. Giovanni Bernulli, ed il Sign. Ermano conoſcere che tal legge non ſolo ſi conſerva negli urti diretti, ma ancor negli obbliqui, il primo ſervendoſi di elaſtri il ſecondo di corpi eguali, come ora eſporremo.

Imperocchè ſiano gli elaſtri L, M, N, O, che dalla palla Q poſſano piegarſi colla velocità 1, e ſia la palla Q $=$ 1 la cui velocità QL $=$ 2. Tirata la retta ML, e prodotta in P, ſe ſi tiri ad eſſa la normale QP potrà diſcomporſi nelle linee PQ $=$ 1, e PL $= \sqrt{3}$. Agiſca dunque Q contro l'elaſtro L colla normale QP, e ſarà intieramente piegato l'elaterio, ed il corpo Q proſeguirà il cammino per la retta LM $=$ PL $= \sqrt{3}$. Facciaſi il triangolo rettangolo LFM, ſicchè la normale LF ſia 1, e l'altro lato ſia $\sqrt{2}$, colla velocità 1 ſarà piegato l'elaſtro M, e intanto Q ſi avanzerà per MN $=$ FM $= \sqrt{2}$. Fatto il terzo triangolo iſoſcele MRN, di Fig. 8.

cui

cui amendue i lati ſian 1, ſarà piegato il terzo elaſtro N. In fine proſeguendo la palla per la retta HO = NR = 1 piegherà l'ultimo elaſtro O, onde poi perdute le forze ſarà la palla ridotta alla quiete. Se ſi cerca di miſurar la forza della palla Q, non è da dubitare, che avendo ella piegato quattro elaſtri eguali non debba eſſer eguale a 4. Ma la velocità era 2. Dunque velocità 2 imponerà forza 4, ed in conſeguenza ancora ne' moti obbliqui ſaranno le forze come i quadrati delle velocità.

Collo ſteſſo metodo può dimoſtrarſi come una velocità 3 potrà flettere elaſtri 9, e 4 potrà flettere 16, e così ſeguitando ſi aſcenderà ſempre al quadrato.

RISPOSTA.

MA ſe da' moti diretti non ſeguita, come abbiamo notato, la legge Leibniziana, molto men dagli obbliqui. Onde non ſenza ragione il Sign. de Mayran rifiuta coteſto metodo, come incerto, e fallace, potendoſi in modi infiniti diſcomporre

la

la data velocità con triangoli obbliqui, onde la ſomma delle forze avanti l'urto or ſia eguale, or minore, ed or maggiore della ſomma dopo l'urto. Baſta riflettere come ſecondo il principio di Meccanica del dottiſſimo Varignon un ſolo peſo può far equilibrio ad innumerabili peſi, perchè ſia facile il conoſcere che ciò che conviene alle forze morte può convenire ancora alle vive.

In ſecondo luogo da tali diſcompoſizioni di forze non v'è maggior ragione di dedurre il Leibniziano, che il Carteſiano principio. Imperocchè ſia la palla C = 1, e la celerità CL = 1, Fig. 9.
la perpendicolare = $\frac{1}{2}$, e potrà la palla C movere quattro palle eguali a 1 colla velocità $\frac{1}{2}$. Dunque ſe velocità 2 move quattro palle con velocità 1, come nel primo eſempio, e velocità 1 move quattro palle con velocità $\frac{1}{2}$ nel ſecondo, ſarà dunque col metodo Carteſiano la forza prima alla forza ſeconda come 4 : $\frac{4}{2}$ cioè co-

me

me 2 : 1, ch' è la ragion delle velocità, e non de' quadrati.

Terzo non si vede come in tal ipotesi si prenda per la velocità agente il 2, e non piuttosto il 4, essendo 4 le velocità, che agiscono nella formazione de' quattro triangoli. Così nello esempio secondo la velocità agente è propriamente 2, non 1; onde le somme delle forze dopo l' urto sono come $4\frac{1}{2}$: 4 cioè come le velocità agenti.

ARGOMENTO V.

Un altro argomento lo prendono i Leibniziani da diverse sperienze o di gravi cadenti da diverse altezze sopra molli materie, o di corpi elastici cadenti sopra superficie elastiche, nelle quali si veggiono sempre gli effetti proporzionali al quadrato della velocità, e non alla velocità.

Imperocchè siano, come fu primo a sperimentare il dottissimo Sign. March. Poleni due sfere A e B, delle quali siano eguali i diametri, e diseguali i pesi, e po-

posto il peso A al peso B come 4: 2 si faccia cadere A sull'argilla molle da un'altezza 1, e B da un' altezza 4, ed è da osservarsi che amendue formeranno eguali forze, e ciò sempre seguirà, quando i pesi delle sfere cadenti saranno in ragione reciproca delle altezze, da cui discendono. Ma ciò non potrebbe accadere secondo il principio de' Cartesiani. Imperocchè secondo il loro metodo la forza di A a quella di B sarebbe come. 4: 2, ed in conseguenza l'effetto di A sarebbe duplo di quello di B. Ma moltiplicando le masse per lo quadrato delle velocità secondo il metodo del Leibnizio si trova, che le forze d' amendue sono eguali, onde nascono effetti eguali, come si vede colla sperienza. Fig. 10.

Ciò maggiormente si conferma nella caduta de' corpi elastici sopra superficie elastiche. Imperocchè sia una palla d'avorio, ovvero d'acciajo, che cada sopra una tavola di marmo sparsa di poca polve, o velata con tenue superficie di cera, e si troveranno le impressioni fatte nella medesima tavola in proporzione delle altezze, da cui la palla diſcende, e ſe due palle ſaranno in ragion reciproca delle altezze, da cui diſcendono, ſi faranno ſempre le impreſſioni eguali, il che non potrebbe farſi, ſe le forze delle palle non foſſero, come le altezze, cioè come i quadrati delle celerità, ſecondo il Leibnizio.

Nè da tali ſperienze ſono differenti quelle del Sign. Marſeno, del P. Lana, e del Sign. s'Graveſande per mezzo de' peſi cadenti ſull'eſtremo d'una bilancia, che non fanno equilibrio a' peſi attaccati all' altro eſtremo, ſe non quando gli ſpazj percoſſi da' gravi ſono in ragione reciproca delle maſſe.

RISPOSTA.

MA per riſpondere a coteſti argomenti è da vedere, ſe tali effetti ſono prodotti in tempi eguali, o ineguali.

Sia perciò la maſſa di A = 4, e la ſua velocità = 1, e la maſſa di B = 1, e la ſua velocità = 2. [illegible]hè le preſſioni ſono in ragio[illegible]poſta diretta delle maſſe a[illegible], e diretta delle veloci-

tà,

tà, ed inversa delle resistenze, essendo in tali ipotesi le resistenze eguali, se le resistenze si dicono r la pressione di A alla pressione di B sarà come $\frac{4}{r} : \frac{2}{r} =$ 2: 1. Ma gli effetti sono come le pressioni moltiplicate negli elementi del tempo; dunque poste le pressioni 2p, ep, i tempi T, e t, e gli effetti E ed e, si averà 2pdT = pdt, e perciò 2T = t, onde si deduce, che il tempo dell'azione di B è duplo del tempo dell'azione di A. Ed in tal modo maggiormente apparisce l'analogia delle comunicazioni del moto, e della ascendenza de' gravi, la qual analogia uno de' primi ad osservare fu lo stesso Giovanni Bernulli, e perciò paragonò la gravità ad un elastro infinito, che agisce contro un corpo con una pressione costante, e così l'Ermano quando paragona le perdite delle velocità de' corpi in moto colle perdite delle velocità de' gravi cadenti.

Posti dunque i tempi delle azioni in ragion eguale ai tempi delle cadute, non è da maravigliarsi, se in tempo 2 forza 2 faccia lo ſteſſo effetto, che forza 4 in tempo 1, e in reſiſtenze eguali. Lo ſteſſo vale per gli altri Fenomeni, onde non ſenza fondamento pare, che tanti ſi ſieno ſerviti di tale principio, tra' quali il dottiſſimo Sign. Crouſatz (*Eſſay de mouvement Art.* 5. *&* 6.) e il Sign. Mayran nella ſua ingegnoſa memoria del 1728., e tale ſi ſcopre eſſere il ſentimento del famoſo Turino.

Aggiungaſi, che quando i Leibniziani ſi oppongono a tale dottrina, non determinano però il contrario, e meno quale ſia la ragione de' tempi.

Egli è vero, che a tale dottrina molto ſi oppone il dottiſſimo Sign. Co: Jacopo Riccato, e trovò un ingegnoſo obbietto inferito nella diſſertazione del Sign. March. Poleni, che in lingua Italiana così noi traſporteremo.

Fig. 11. ,, Perchè chiaramente ſi dimoſtri l'aſſurdo, che ſigue dall'arbitraria ipoteſi, cui ſi appoggia l' argomento e la riſpoſta del Sign. de Crouſatz, fingiamo che il globo meno grave A cada dall'altezza AC, e faccia la foſſa CD. Paſſi per lo punto A la retta

oriz-

orizzontale GAF, e la parte AE di tal linea rappresenti il tempo, che si consuma dallo stesso globo A per formar la fossa CD. Dal comun vertice C si descrivano due parabole CHE, CIF, che passino per gli punti determinati E, ed F. Si prenda un globo B più grave, ma di diametro eguale al diametro del corpo A, e sia in guisa collocato, che la sublimità BC sia alla sublimità AC nella stessa ragione, in cui è la massa del globo A alla massa del globo B, e sia formata la prima fossa CD. Il globo B cadendo dal punto B sarà la stessa fossa eguale alla prima, come lo sperimento Poleniano dimostra, e l'chiarissimo de Crousatz ammette.

Sia nella parabola CIF l'ordinata BI corrispondente all'altezza BC, dico che se la risposta è vera, dall'ordinata BI sarà rappresentato il tempo consumato dal globo B nel formar la fossa CD. Imperocchè, come ad esso piace, i tempi impiegati da due globi A e B in compiere le fosse eguali, sono nella stessa ragione delle velocità, che acquistano gli stessi globi cadendo, il primo dall'altezza A C, il ſecondo dall'altezza B C. Ma queſte velocità ſono in ragione ſudduplicata di quelle altezze, dunque anche i tempi ſaranno nella ſteſſa ſudduplicata ragione. E perchè la retta A F rappreſenta il tempo impiegato dal corpo A in far la ſua foſſa, e per natura della parabola $\sqrt{AC} : \sqrt{BC} = AF : BI$, ſegue che l' applicata B I eſprimerà il tempo impiegato dal globo B nel far la ſua foſsa, purchè ſia vera l'ipoteſi del Sig. Crouſatz.

Tali coſe poſte dal vertice D coll'aſſe D A, ſi deſcriva la terza parabola D K G eguale, o per meglio dire la ſteſſa, che la parabola C H E, e ſolo differente di poſizione. E' chiaro, che rappreſentando le ordinate A E, B H i tempi delle diſceſe per A C, B C, ſe i globi A, e B continuaſſero a diſcendere per lo ſpazio vacuo C D ſenza incontrar alcuna reſiſtenza, e chiaro dico, che la retta A G rappreſenterebbe il tempo della diſceſa per B D. Dunque ſottratti i tempi A E, B H impiegati nelle diſceſe per A C, B C, l'intercetta G E eſprimerà il tempo impiegato dal globo A,

che

che cadendo dal punto A percorrerà nel vacuo con moto accelerato lo ſpazio C D, e l'intercetta K H eſprimerà il tempo impiegato dal globo B che cadendo dal punto B percorrerà nel vacuo con moto accelerato lo ſteſso ſpazio C D.

Si determini ora nell' aſse il punto B, ſicchè l'intercetta K H diventi eguale all'ordinata B I, il che ſi otterrà in queſto modo. Sia l'ordinata A E, e l'ordinata A F quella ragione, che v'è tra qualunque quantità n, e l' unità, e ſi faccia x † 2n : nn = DC : CB, e ſarà B il punto cercato. Dunque ſe l' ordinata BI eſprime il tempo, in cui il globo B cadendo dal punto di quiete B forma la foſſa CD, l' intercetta KH eſprimerà il tempo, in cui il globo B cadendo dal punto B percorrerà nel vacuo lo ſteſſo ſpazio CD ſenza incontrar alcuna reſiſtenza. Ma poichè per la coſtruzione i tempi *BI*, *KH ſono* eguali, ſeguirà che nell' uno e nell' altro il globo B farà lo ſpazio CD in tempi eguali, e quando diſcenderà per lo vacuo con moto libero, ed accelerato, e quando diſcenderà con moto ritardato per la reſiſtenza della ſoggetta materia, il che è un manifeſtiſſimo aſsurdo.

Ma per riſolvere queſta obbiezione, reſta prima da ſtabilire come vengono da' Carteſiani ſtabiliti codeſti tempi. Imperocchè ſe ſi ſuppongono i tempi dell'azioni minori come ſi voglia de' tempi delle cadute, non è da dubitare dell'obbietto. Ma ſe i tempi ſono maggiori, o minori ceſſa l'aſſurdo. Poſti dunque i tempi eguali a quelli delle cadute ſarà la parabola CIF la ſteſſa che la parabola EHC, ed allora l'intercetta HK non può mai eſſere eguale, e maggiore dell'ordinata BI. Imperocchè ſia $BH = z$, $HK = y$, $BC = x$, $CD = u$; ſarà $BD = a + x$, $BK = z + y$. E per natura della parabola (poſto il parametro 1) $zz = x$, e $zz + 2yz + yy = a + x$. Sottrando dunque i tempi eguali zz, e x, ſi avrà $2yz + yy = u$, dove ſi trova $y = \sqrt{a + zz} - z$.

Nella qual eſpreſſione facilmente ſi conoſce, che y dee ſempre eſſer minore di z. Perchè ſe foſſe eguale ſi avrebbe $2z = \sqrt{a + zz}$,

e per-e perciò $z = \frac{\sqrt{a}}{3}$, il che è impoſſibile. Nè parimente può eſſer maggiore, perchè ſe foſſe per eſempio $2z$, ſi avrebbe $8zz = a$, e perciò $z = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a}}{2}$ il che parimente è impoſſibile.

Che ſe i tempi ſi prendano maggiori, molto meno l'obbietto conclude. Reſta dunque, che con tale argomento non ſi dimoſtri aſſurda la propoſizione de' Carteſiani.

CONCLUSIONE.

DAlle coſe dette dunque ſi può concludere, che le Forze Vive ſolo in queſto ſono diverſe dalle Morte, che le morte ſono una *pura Poſſanza* di produrre in un corpo una velocità, e le vive ſono il moto attuale, e la velocità nel corpo ſteſſo prodotta; che la miſura delle prime è la ſteſſa che quella delle ſeconde, con queſto divario, che nelle prime le miſure ſono le velocità da produrſi, e nelle ſeconde le velocità prodotte. Che ſe nell' azion delle forze vive non appariſcono gli effetti in tal proporzione, queſto naſce perchè nella comunicazione de'moti molte variazioni naſcono, e dalle reſiſtenze de'corpi, che ſono moſſi, e dalle diverſe direzioni, e da'tempi in cui ſi fanno le azioni. Che ſe i tempi ſiano negletti, può farſi equivoco nella proporzione delle forze, perciò il Geometra fa la loro comparazione in tempi eguali.

I. Se le forze ſono come i quadrati è da ſpiegare come una forza maggiore non ſuperi la minore, ma reſtino in equilibrio; e perchè ne' corpi molli ſe $M = 1$, $U = 2$, $m = 2$, $u = -1$, dove la forza di $M = 4$, e quella di $m = 2$, la forza maggiore non ſupera la minore; ma amendue ſi elidono, e non v'è moto.

II. Perchè ſe una maſſa 1 con velocità 3 può comunicar velocità 1 a maſſe 5. 3. 1, quando la maſſa mobile è 9, ella comunica ſolo $\frac{6}{5}$, ed ribattuta con $\frac{12}{5}$.

III. Se la coſtanza prima dell' urto, e dopo l'urto dee ſervir d' argomento per iſtabilire le forze, i Leibniziani potranno porre per la la loro forza il quadrato, ma anche i Carteſiani il loro moto poſitivo, e l'Hughenio, quando vuole la ſua velocità reſpettiva, che ha più jus d'ogni altro principio.

VI. Quando due quantità ſono in ragione compoſta di due ragioni, potranno ſempre aſſegnarſi le due ragioni componenti. Se F: f = UU: uu. Dunque F: f = U: u, ed U: u. Biſogna dunque aſſegnar tali ragioni.

V. Oſſerva il celebre Sign. Mariotte, che le forze de' fiumi ſono, come le maſſe, e le velocità, e perciò come MU: mu. Ma perchè le maſſe ſono come le velocità ſaranno tali forze come UU: uu. Se le forze foſſero ſecondo i Leibniziani come UU: uu, dunque, come nota il Sign. Euſtachio Manfredi, le forze de' fiumi ſarebbero come $U^3 : u^3$, il che è contrario all'eſperienza.

Per le quali coſe ogni un può vedere, quanto ſia difficile in tale materia il determinarſi. E forſe per tal ragione l'ingegnoſiſſimo Bulfingero dopo di aver ben eſaminato per ogni parte gli obbietti, pare piuttoſto inclinato a

R 6 con-

conciliare i partiti, che ad accendere le discordie. Io espongo la forza morta per una sola dimensione, qual è la massa M, il momento della forza morta per due qual è MC. Ma il momento della forza viva ha bisogno di tre dimensioni, la terza delle quali è la flussione elementare di questo momento, che essendo come la velocità forma il valore MCC, ch' è la forza viva. *Patet denique adeo non dissentire mensuram virium Leibnitianam a vera mortuarum aestimatione, ut potius altera sequatur ex altera.*

Com. Petrob. Sess. 11. part. 6.