LEGGI DEL MOTO,

DISSERTAZIONE

DEL PADRE

D. GIOVANNI CRIVELLI

SOMASCO.

LEGGI DEL MOTO *DIRETTO*

DISSERTAZIONE

DEFINIZIONI.

I. Corpo *perfettamente molle* diceſi quello, che quando è ſtato compreſſo, reſta eſattamente nella ſua compreſſione ſenza alcuna energia, ovvero efficacia di reſtituirſi, come proſſimamente la creta, o il ſevo.

II. Corpo perfettamente *elaſtico* è quello, che dopo di eſſere ſtato da qualche forza compreſſo ſi reſtituiſce alla ſua primiera figura, come proſſimamente una sfera d'avorio, o d'acciajo.

III. La quantità del moto è il prodotto d'una maſſa che ſi move nella ſua velocità, onde ſe la maſſa ſi dica M, e la velocità U, la quantità del moto ſarà MU. E perciò data la quantità del moto MU, ſe ſi divida per la maſſa M, ſi avrà la velocità U, e dividendola per la velocità U, ſi avrà la maſſa M.

IV. Velocità *Respettiva*, ovvero *Agente* dicesi quella, che fa l'azione nella percossa. Tale velocità quando i corpi si muovono verso la medesima parte è sempre eguale alla differenza delle velocità assolute, e quando i corpi si muovono in contraria parte è sempre eguale alla loro somma. Dunque se le velocità si dicono U, ed u nel primo caso la velocità respettiva è U — u, nel secondo U † u.

OSSERVAZIONI.

I. NEll'urto de' molli due moti eguali, e contrarj si elidono.

II. Ma se l'uno è maggiore dell'altro, il minore elide una parte eguale al maggiore, e vi resta il solo eccesso del magggiore.

III. In fine se non sono contrarj, nessuno distrugge l'altro, e vi resta la somma d'amendue. Ciò, nota il dottissimo Sign. Fontanelle, Memorie dell' Accademia 1720., si può conoscere colla sola ragione, e prima d'ogni sperienza. ,, *Il'est clair par la seule Me-*
,, *taphysique, & independament de*
,, *l'experience, que deux forces egales*
,, *etant opposeès, elles empechent abso-*
,, *lu-*

„ lument, l'action l'une de l'autre, „ & se detruisent mutuellement etant „ qu'elles sont forces agissantes, qu'el„ les ne se detruisent nullement si el„ les ne sont nullement opposeès, & „ que si deux forces sont inequales, & „ opposeès, il ne reste de leur combat, „ que l'excès de la plus grande sur la „ plus petite.

Leggi del moto diretto ne' corpi molli

ARTICOLO I.

SIa il corpo che urta = M, la sua velocità = U, il corpo urtato m, la velocità sia u. Nel punto dell'urto i due corpi, ch'erano separati, diventando uniti, formeranno un corpo solo, in cui 'l moto sarà MU+mu. Dividendo dunque tal moto per la massa totale M+m, si avrà la velocitá comune ad amendue

$$\frac{MU+mu}{M+m}.$$

Tale Canone è generale, se si osserva di far negativo m u, quando le direzioni sono contrarie, e zero quando il corpo è in quiete.

Se dunque M è 2, U 2, m 1,

u o, la velocità comune ſarà $\frac{4}{3}$.

Se M è 2, U 2, m 1, u 1, ſarà $\frac{5}{3}$

Se finalmente M è 1, U 1, m 2, u − 2, la velocità ſarà $-\frac{3}{3}$, cioè anderanno amendue colla velocità negativa $-\frac{3}{3} = -1$.

Annotazione.

I primi che ritrovarono tali Leggi furono il Wallis, l'Hughenio, il Wrenio, ed il Mariotte.

COROLLARJ.

I. LA velocità dopo l' urto eſſendo $\frac{MU + mu}{M + m}$, dunque la velocità comunicata dal corpo M al corpo m ſarà $\frac{MU + mu}{M + m} - u = \frac{MU - Mu}{M + m}$

Dunque le celerità comunicate a' corpi percoſſi ſaranno in ragione compoſta diretta de' corpi che percuotono, diretta delle velocità reſpettive, ed inverſa delle maſſe totali.

II. Perciò ſe le maſſe ſiano le medeſime, e ſi cangino le ſole velocità, on-

onde ſia prima U, ed u, indi X, ed x, ſaranno le velocità comunicate come $U - u : X - x$, cioè come le velocità reſpettive.

III. Se i moti ſono contrarj, la celerità comune dopo l'urto ſarà $\frac{MU - mu}{M + m}$

Dunque la velocità perduta di $M = U - \frac{MU + mu}{M + m} = \frac{mU + mu}{M + m}$. E la perduta di $m = -u - \frac{MU + mu}{M + m} = \frac{-MU - Mu}{M + m}$.

Perciò le celerità perdute ſono come $m : -M$, cioè in ragion reciproca delle maſſe.

IV. La celerità acquiſtata da m per il primo $= \frac{MU - Mu}{M + m}$ la perduta da $M = \frac{mU - mu}{M + m}$. Dunque l'acquiſtata da m è alla perduta da M, come $M : m$, cioè in ragion reciproca delle maſſe.

V. Se ſi moltiplica ciaſcun corpo per la ſua celerità dopo l'urto ſi avranno i loro moti $\frac{MMU + Mmu}{M + m}$, e $\frac{MmU + mmu}{M + m}$ la ſomma de' quali $= MU + mu$.

Perciò ſe non ſono contrarj, reſta la ſomma poſitiva avanti, e dopo l'urto;

ma ſe ſono contrarj, le parti contrarie ſi elidono, e reſta la ſola differenza.

Leggi del Moto diretto ne' Corpi perfettamente elaſtici.

ARTICOLO II.

POſte le leggi de' corpi molli non è difficile il conoſcere quella degli elaſtici, ſe ſi conſidera che l'elaſtico agiſce con quella ſteſſa forza, con cui è ſtato percoſſo. Un arco per eſempio vibra la ſua ſaetta in quanto è ſtato piegato, e la ſua vibrazione dipende dalla ſua compreſſione. Ne' molli agiſce la ſola percoſſa, negli elaſtici la percoſſa e la ripercoſſa. Poſte le quali coſe in tal modo ſi forma il Canone univerſale.

Sia il corpo che urta M, e la velocità U, l'urtato m, e la velocità u. Se foſſero molli, la velocità comunicata al corpo m, ſarebbe $\frac{MU - Mu}{M + m}$.

Ma l'elaterio di M ne comunica altrettanta. Dunque la velocità acquiſtata da m $= \frac{2MU - 2Mu}{M + m}$. Egli

aveva u. Avrà dunque $u + \frac{2MU - 2Mu}{M + m} =$

$\frac{2MU - Mu + mu}{M + m}$.

Per

Per conoscer poi quella di M considero, che se fosse molle, la sua velocità perduta sarebbe $\frac{mU - mu}{M + m}$. Ma l'elaterio di m gliene toglie altrettanta. Dunque sarà $\frac{2\,mU - 2\,mu}{M + m}$.

Egli aveva U: Dunque sarà $U - \frac{2\,mU + 2\,mu}{M + m} = \frac{MU - mU + 2\,mu}{M + m}$

Se m è 2, U 1, m 1, u 0, dopo l'urto M avrà $\frac{1}{3}$, m $\frac{4}{3}$

Se M è 2, U 1, m 1, u -2, dopo l'urto M avrà -1, m 2

Se m è 1, U 6, m 8, u 1, dopo l'urto M avrà $-\frac{26}{9}$, m $\frac{19}{9}$

COROLLARJ.

I. LA velocità comunicata a' molli $= \frac{MU - Mu}{M + m}$

La comunicata agli elastici $= \frac{2\,MU - 2\,Mu}{M + m}$.

Perciò è dupla. Onde le velocità comunicate agli elastici saranno nelle stesse ragioni di quelle, che sono le comunicate a' molli.

II. Anche le celerità perdute negli elastici sono doppie delle perdute ne' molli, onde nasce un nuovo metodo di calcolar le celerità degli elastici. Imperocchè sia M 4, U 6, m 1, u 2; Se fossero molli la celerità acquistata da m sarebbe $\frac{16}{5}$. Essendo dunque elastico acquisterà $\frac{32}{5}$, ed avendo già $\frac{10}{5}$, avrà dunque in tutto $\frac{42}{5}$. Se M fosse molle perderebbe $\frac{4}{5}$. Dunque perderà $\frac{8}{5}$. Aveva $\frac{30}{5}$. Dunque resterà con $\frac{22}{5}$.

III. Se le celerità sono contrarie, la celerità perduta di M sarà $\frac{2mU + 2mu}{M+m}$, e la perduta da m — $\frac{2MU - 2mu}{M+m}$. Dunque le celerità perdute sono come m : M, cioè in ragion reciproca delle masse, come nei molli.

IV. Il moto perduto di M è lo stesso, che l' acquistato da m. Imperocchè il moto di M prima del urto era MU, dopo l' urto è $MMU - \frac{MmU + 2Mmu}{M+m}$. Dunque il perduto è $MU - \frac{MMU + MmU - 2Mmu}{M+m} = \frac{2MmU - 2Mmu}{M+m}$.

II

Il moto di m prima dell'urto era mu; dopo l'urto $= \frac{2MmU - Mmu + mmu}{M + m}$.

Dunque il moto acquistato $= \frac{2MmU - Mmu + mmu}{M + m} - mu = \frac{2MmU - 2Mmu}{M + m}$.

Annotazione.

Tale velocità, che viene comunicata da M a m non bisogna credere, che venga comunicata tutta insieme, o in un minimo tempo. Il che se fosse, la natura opererebbe per salto, ed i corpi passerebbero da uno stato all'altro senza passar pe' gradi intermedj; il che ripugna alla ragione, ed alla sperienza.

,, Siano per questo i due trian-
,, goli rettangoli, ed equilateri
,, tra sè AFB, AFE, di cui Fig. 12.
,, l'asse comune AF rappresenti
,, il tempo. Diviso tal asse in
,, parti infinitesime eguali si con-
,, cepiscano infinite ordinate pa-
,, rallele alla base, come af, ad,
,, e quelle che terminano al-
,, la retta BF rappresentino le

,, celerità del corpo percuziente
,, M, le quali vanno ſempre di-
,, minuendo, e quelle che termi-
,, nano alla retta AE rappreſen-
,, tino le celerità del corpo per-
,, coſſo m, che ſi ſuppone egua-
,, le al percuziente. Seguita da
,, tali coſe, che nel principio
,, del tempo A, la velocità del
,, corpo M ſarà eſpreſſa per la
,, retta data AB, è quella di m
,, ſarà eguale a zero. Ma al fi-
,, ne del primo minimo tempo
,, A a il corpo M avrà comunica-
,, to al corpo m il primo mo-
,, mento di velocità ad = Be;
,, onde la velocità di m ſarà ad,
,, e quella di M reſterà af, po-
,, ſta Be = ad. Al fine del ſe-
,, condo tempo, m acquiſterà un
,, altro elemento di velocità,
,, per cui creſcerà la velocità ad,
,, e ſi deminuirà egualmente af;
,, e così ſeguitando di tempo in
,, tempo la velocità di m creſce-
,, ſcerà per l' acquiſto di conti-
,, nui momenti; e quella di M
,, decreſcerà per la perdita d'al-
,, trettanti ſino al punto C, che
,, ſtà alla metà dell' aſſe, dove la
,, celerità CG diventa eguale a
,, CD. Nel qual punto ſe i cor-

,, pi

„ pi fossero molli, anderebbono
„ amendue colla stessa velocità,
„ non potendo più il primo ag-
„ giugnere nuovi momenti al
„ secondo. Ma perchè si suppon-
„ gono elastici, l'elaterio di M
„ a poco a poco esplicandosi,
„ aggiugnerà continuamente nuo-
„ vi momenti alla celerità CD,
„ la quale sempre crescendo di-
„ venterà finalmente FE = AB;
„ mentre intanto CG anderà
„ sempre diminuendo sino che al
„ punto F diventerà zero; on-
„ de si conosce che al fine del
„ tempo AF il corpo M perde-
„ rà tutta la sua velocità AB,
„ e questa sarà trasportata nel cor-
„ po m, e diventerà EF; onde si
„ conosce come al fin d'un dato
„ tempo dee il corpo M restar
„ dopo l'urto immobile ed m dee
„ avanzarsi con una velocità FE
„ eguale alla velocità AB, con
„ cui restò percosso.

COROLLARIO V.

NEll'urto de' corpi elastici la somma del moto avanti l'urto si eguaglia alla somma dopo l'urto.

Sia

I. Sia il moto di $M = a$, quello di $m = b$; sarà la somma avanti l' urto $a + b$. M comunica x, i moti dopo l'urto diventano (Per lo Cor.° IV.°) $a - x + b + x = a + b$.

II. Sia il moto di $M = a$, di $m = b$. Perda M $a + x$, sicchè il suo moto diventa $- x$, e quello di m sia $b + a + x$. Somma avanti l' urto $= a + b$. Dopo l'urto $= a + b + x - x = a + b$.

III. Sia il moto di $M = a$, di $m = - b$. Somma avanti l'urto $= a - b$. M perde x. Moto di M dopo l' urto $a - x$; di m, $- b + x$. Somma $a - b$.

IV. Sia il moto di $M = a$, di $m = - b$. M perde $a + x$ sicchè il suo moto diventa $- x$. Quel di $m = a + x - b$. Somma prima dell'urto $= a - b$, dopo l' urto $= a + x - b - x = a - b$.

TEOREMA I.

SE negli elastici si prendano le celerità dopo l'urto, e si sottragga la minore dalla maggiore, avrassi $U - u$, e se si sommino le velocità allora che le di-

re-

rezioni sono contrarie, si avrà $U + u$. Dunque come osserva l' Hughenio, quella stessa velocità respettiva, ch' era avanti l' urto, durerà ancor dopo l' urto, ch' è uno de' suoi celebri Teoremi.

LEMMA.

SIano due corpi M, ed m, de' quali il centro di gravità sia C, e primamente si muovono amendue verso la medesima parte, determinar il moto CD del loro centro di gravità C.

Sia $MC = A$, $mC = a$, e per condizione del centro di gravità si avrà $MA = ma$. Posta $MB = U$, $mb = u$, $CD = x$, sarà $BD = A - U + x$, $bD = a + u - x$. E per la condizione del centro di gravità si avrà $MA - MU + Mx = ma - mx + mu$, onde sottraendo i termini MA, ma, che sono eguali per supposizione sarà $x = \frac{MU + mu}{M + m}$. Fig. 1.

Se i corpi si venissero incontro, la velocità del centro di gravità sarebbe $\frac{MU - mu}{M + m}$.

Dunque se i moti non sono

con-

contrarj, la velocità del centro ſi eguaglia alla ſomma de' moti diviſa per la ſomma delle maſſe, e ſe ſono contrarj alla differenza.

TEOREMA II.

La celerità del centro di gravità avanti l' urto ſi eguaglia alla celerità del centro di gravità dopo l'urto conforme il ritrovato d' Hughenio.

La celerità del centro di gravità avanti l'urto ſi trova per lo Lemma $= \frac{MU + mu}{M + m}$, cioè a dire eguale alla ſomma de' moti diviſa per la ſomma delle maſſe. Se ſi prende anche dopo l' urto la ſomma de' moti, e ſi divida per la ſomma delle maſſe ſi avrà lo ſteſſo valore. Dunque le celerità del centro ſaranno eguali.

Moto dopo l' urto del corpo $M = MMU + 2\,Mmu - MmU : M + m$

Moto dopo l' urto del corpo $m = \frac{2\,Mmu - Mmu + mmu}{M + m}$

Somma de' moti $= MU + mu$

Ce-

Celerità del centro di gravità $\frac{MU + mu}{M + m}$

Se i moti ſono contrarj le celerità del centro ſono $= \frac{MU - mu}{M + m}$.

TEOREMA III.

SE ſi moltiplichino le maſſe nel quadrato delle loro velocità avanti l'urto, e dopo l'urto, e ſi prendano le loro ſomme, tali ſomme in amendue i caſi ſi troveranno ſempre eguali.

Siano due corpi M, ed m, de' quali le velocità avanti l'urto ſiano U, ed u, e quelle dopo l'urto x, ed y, e ſi muovano verſo la medeſima parte, la velocità reſpettiva avanti l' urto è $U - u$, e dopo l' urto $x - y$. E perchè per lo Teorema I. ſi conſerva ſempre la ſteſſa velocità reſpettiva, ſi avrà $U - u = x - y$. Ma ancor per lo Teorema II. ſi conſerva ancora la celerità del centro di gravità avanti, e dopo l'urto ſi avrà $\frac{MU + mu}{M + m} = \frac{Mx + my}{M + m}$ cioè $M - U + mu = Mx + my$

Nella prima equazione $U + x = y + u$

Nel-

Nella ſeconda $MU - Mx = my - mu$

Moltiplicando l'una per l'altra $MUU - Mxx = myy - muu$.

Ovvero $MUU + muu = Mxx + myy$

Dunque ſe vi ſiano due corpi elaſtici M ed m, e ciaſcun ſi moltiplichi nel quadrato della ſua velocità avanti l'urto, indi nel quadrato di quella, ch'egli ha dopo l'urto, ſi troveranno ſempre eguali ſomme, ch'è la celebre legge d'Hughenio Prop. 6.

Se per eſempio una maſſa 1, che con velocità 1 ſi muova contro una maſſa 2 poſta in quiete. Dopo l'urto la prima ritornerà indietro colla velocità $\frac{1}{3}$, e la ſeconda anderà avanti con $\frac{2}{3}$. Moltiplicando tali maſſe nel quadrato della loro celerità avanti l'urto ſi trova, che la ſomma di tali quadrati è 1. E moltiplicando le ſteſſe maſſe nel quadrato della lor velocità dopo l'urto, ſi trova la ſomma $= \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1$

Sia in ſecondo luogo M 2, U 3, m 1, u $-$ 1. Dopo l'urto le le velocità saranno $\frac{1}{3}$, $\frac{13}{3}$. Somma avanti l'urto = 19, Somma dopo l'urto = 19; e così in qualunque supposizione. Dunque ecc.

Leggi della comunicazione del moto tanto pe' corpi molli, quanto per gli elastici, quando gli urti sono obliqui.

Sia il corpo M, che urta obliquamente il corpo N per la retta MO. Per determinar la comunicazione del moto bisognerà concepire la retta MO, come una direzione composta di due direzioni, l'una perpendicolare come RO, l'altra orizzontale come MR. E perchè alla MR non resiste il corpo urtato N, e la sola resistenza è per RO, si riguarderà l'urto fatto come per la sola RO, secondo la quale si faranno le mutazioni, restando immutabile la MR. Fig. 2.

Supposto dunque per esempio che il corpo M sia perfettamente elastico, e dopo aver percosso, come se direttamente si movesse per RO, debba fermarsi, ed intanto il corpo N debba muo- Fig. 3.

muoversi colla celerità di quello, che lo ha urtato, allora fatto OQ eguale alla OR, ed OT eguale alla MR, sarà il corpo M nel punto T, ed N nel punto Q.

Fig. 4. Ma se M dovesse *avanzarsi in B*, ed N nel punto Q, allora fatto OD eguale alla MR, e tirata la diagonale OT, intanto che M anderà nel punto T, N anderà nel punto Q.

Fig. 5. Finalmente se M dovesse retrocedere in B, e N dovesse avanzarsi in Q, allora fatta OD eguale alla MR, e tirata la diagonale OT, intanto che M anderà in T, N anderà nel punto Q.

DEL-