GIULIANI

ALGEBRA

Al Reverendissimo
P. D. Giuseppe Ferrari
Generale dei Somaschi
In testimonio
di altissima stima
e di figliale rispetto
l'a.

TRATTATELLO ELEMENTARE

DI

ALGEBRA

COMPOSTO

DAL P. D. GIO. BATT. GIULIANI

C. R. SOMASCO

AD USO

DEL COLLEGIO E LICEO DI LUGANO.

LUGANO

DALLA TIPOGRAFIA VELADINI E COMP.

1841.

AL MOLTO REVERENDO PADRE

D. MARCO GIO. PONTA

C. R. S.

PROPOSTO DEL LICEO E COLLEGIO S. ANTONIO

DI LUGANO.

A niuno meglio che a Lei, degnissimo P. Proposto, si è dovuta la dedicazione di questo breve trattato. Ella con l' autorità de' suoi sapienti consigli mi fu conforto a porvi mano, e poichè timido io mi rimaneva dal cominciato lavoro, m' aggiunse nuovo stimolo a farlo compiuto e così come mi venne fatto, si adoperò a fine uscisse fuori alla pubblica luce. Ond' è *che io sarei meritevole di forte biasimo se a tutt' altri lo presentassi che alla preg.ma V. Paternità. Aggiunga che io riconosco da Lei molti e segnalati favori che in gran maniera e di per se soli m'obbligano all'offerta che Le porgo. Senza che, a qual più degna persona avea io a rendere un così fatto tributo di estimazione? Chi non iscorge in Lei l'egregio splendore di una rara dottrina accoppiata ad una ancor più rara virtù? E qui mi sarebbe luogo a dire assai, ove tutte volessi toccare le sue peregrine doti, ma lascio il farlo perchè so che Ella, quanto si merita lode, altrettanto se ne mostra sdegnoso. Vero è che il tacer io le sue lodi per solo questa cagione è lode maggiore di quante altre Le potessi mai dare. Con tutto ciò non voglio tenermi sì che non le rinnovi la schietta e veramente cordiale affezione che grandemente mi lega all' amabile sua Persona. Non sì tosto intesi a parlar di Lei che forte m' invogliai di conoscerla, e come prima la conobbi ne fui preso d'ammirazione e di amore. I quali affetti non mi venner meno col tempo e per conversare che io facessi con Lei, anzi viemmaggiormente s'accrebbero, perocchè ognora più amabili e preziose mi venivan parendo le sue rare prerogative. Tanto che le posso affermare senza nè ombra di adulazione, che Ella troverà sì altri più degno del suo amore e la cui stima le torni più gradita, ma non già che al pari di me, l'ami e l'onori. Rimane solo che io La preghi per cortesia a ricevere la picciolezza del dono tenendosi persuaso, che, ove in me ne fosse il potere, gliene sarei largo d'altri maggiori. Dio la conservi lungamente all'amore de' suoi veri confratelli, al sostegno de' buoni studi ed a splendido ornamento e* *decoro della nostra Congregazione. Con ciò devotamente me Le inchino, e pieno di ossequiosa venerazione e riverente affetto mi confermo*

Della P. V. R.ma

Dev.mo Servitore ed aff.mo amico

P. G. B. GIULIANI C. R. S.

Lugano dal Collegio di S. Antonio
a dì 28 aprile 1841.

PREFAZIONE.

I primi principj di una qualunque scienza, ove siano indirizzati ad istruzione di chi n'è affatto digiuno, si vogliono scrivere con l'animo volto a due fini. Primamente è da fare ogni opera per ridurre al sommo di chiarezza e semplicità le nozioni e così le teorie proprie di quella data scienza, e poscia disporle secondo che richiede il soggetto, di di cui è discorso.

Onde riuscire al primo di questi fini fa mestieri che gli elementi di una scienza non comprendano fuorchè le sole verità, le quali vagliono siccome di fondamento a tutte le altre. Quanto alle conseguenze, che da esse verità si derivano non è da perdersi in troppo lungo ragionamento; d'altro modo sarebbe opera di chi non contento ai soli principj *della scienza, volesse farne ampio e compiuto trattato. Oltre a che gioverà usare uno stile che del pari si allontani da una ricercata sublimità che da bassa trascuratezza. Al secondo fine nulla meglio conferisce che il ricercare a fondo la materia sopra cui la scienza si raggira, chè per tal modo verrà fatto di rilevare il giusto ordine, che vuol tenersi per manifestarla altrui. Con tale divisamento applicai la mente a scrivere questi Elementi di Algebra, e mi sono studiato in ogni possibile maniera affinchè non mi andasse fallito.*

Innanzi tratto diedi a vedere che s' intende sotto il nome di Algebra, e per invogliarne lo studio ne posi in chiaro i singolari vantaggi. E senz' altro mi feci a parlare dei segni e delle espressioni algebriche, mercè cui si rendesse vieppiù agevole l' intendere le cose susseguenti. Poscia entrai in discorso delle prime operazioni da effettuarsi sopra le quantità algebriche sia intere, che frazionarie. Di tutte e quante ho fatto parola in bastevol tenore e mi piacque allungarmi alquanto più rispetto alla divisione perchè non così facilmente la si può dare a comprendere, e d' altra parte è forse l' operazione che più d' ogni altra si convien maneggiare. Quindi mi apersi la via alle equazioni di primo grado; accennai la maniera di porre i problemi in equazione, e di farne la debita soluzione. Mi tenni mai sempre cauto di non avanzar passo se non sopra saldo e certo fondamento. Il perchè innanzi discorrere le equazioni del secondo grado mi convenne dire quel tanto che bastasse delle potenze e radici. Mi passai affatto dal toccare l' estrazione della radice cubica per essere poco frequente l' uso che se ne vuol fare, e massimamente perchè ciò importa non picciola difficoltà, da cui la tenera mente dei principianti a gran fatica si può distrigare. Bensì ho ragionato e piuttosto distesamente le regole che si vogliono osservare per fine di estrarre la radice quadrata delle quantità algebriche e così ancora dei numeri. Ciò mi bisognava per disporre gli intelletti a ricevere la teorica sopra le equazioni del secondo grado. Fu mia principal cura di rischiarare questa materia, e a tale effetto stimai opportuno il farmi a risolvere minutamente un qualche problema. E per verità, secondo l' avviso de' savj maestri, alla buona soluzione dei problemi l' esercizio è la cosa migliore. Seguita un capo sopra le ragioni e proporzioni tanto geometriche che aritmetiche. Intorno a che mi parve convenevole il diffondermi con alquanto maggiore larghezza; perocchè ognun sa quanto la scienza delle proporzioni occorra all' uopo nelle umane faccende e sia di necessità a chi intende alla Geometria. E siccome le proporzioni conducono per diritto alle progressioni mi parve buon consiglio d' intrattenermi a farne conoscere la teoria e a dimostrarne *la pratica mercè la risoluzione di ben acconci problemi. Da ultimo apposi un breve cenno dei logaritmi essendochè tornano assai in acconcio a fare spediti i calcoli e a sciogliere le più intrigate quistioni. Per siffatta guisa e togliendo a sicura guida i sommi Maestri, io mi sono ingegnato di rendere piana la via per chi brama addentrarsi più innanzi nella dottrina dell'Algebra. Comunque però mi sia sortito cotal mio lavoro, vi piaccia gradirlo, o giovani studiosi, e se non altro, mi vaglia il buon desiderio che io ebbi di far cosa tutta rivolta al vostro speciale giovamento.*

ELEMENTI D' ALGEBRA

NOZIONI PRELIMINARI.

L'Algebra, nome di mal nota derivazione, vale ad esprimere la scienza e l'arte di ben calcolare le quantità risguardate in generale.

Si dice, che la è una scienza in quanto deriva le regole da principj certi e ne porta la dimostrazione.

È poi un' arte, perchè insegna la pratica e il come usare delle regole.

Due parti si comprendono sotto il nome di Algebra; ciò sono: l'*Analisi* ed il *Calcolo*. La prima ne scorge a ben risolvere i problemi, e vi si fa maggior opera d'intelletto, che nel Calcolo, da cui, per così dire, viene costituita la parte più materiale dell'Algebra.

Negli elementi, a cui poniamo la mano discorreremo in breve e pianamente i soli principj dell'Analisi e del Calcolo, segnando così la strada per chi vorrà farsi più oltre all'Algebra sublime.

Nell'Algebra si contiene tutta quant' è estesa la dottrina delle quantità, e però a buona ragione fu detta *Aritmetica universale*.

Qui non occorre il dire di quanti e quali vantaggi sia essa feconda. Basterà al nostro proposito l' accennare solo ai principali, onde si paja il gran pregio di cotanto nobile disciplina, e si scorga ad un tempo quanto l'Algebra si diversifichi dall'Aritmetica volgare.

E primamente; i numeri adoperati in Aritmetica valgono specificatamente quel tanto, e nulla più; non così delle figure algebriche, il cui valore non è punto determinato e può quindi variare a piacimento.

Di qui è, che le operazioni aritmetiche, mirando a un sol caso, danno risultati solamente particolari; ciò, che non accade in Algebra, dove le conclusioni sono generali e ben si adatta una sola operazione a risolvere tutti i casi di somigliante genere.

Rispetto all'Aritmetica come l' operazione è condotta a termine se n'è perduto ogni segno; laddove in Algebra dura tuttavia la traccia di quanto si è operato, e questo può giovare in più d' un caso.

Più oltre, per mezzo dell'Algebra siam condotti a risultati a che non è concesso pervenire con solo le operazioni aritmetiche, se pure non si dura lunga e nojosa fatica.

Aggiungasi, e ciò rileva assai, che i detti risultati in Algebra si esprimono con tutta brevità; invece usando l'Aritmetica occorrono all' uopo molte parole.

V' ha talvolta dei problemi, al cui scioglimento non è sufficiente l'Aritmetica, ma l'Algebra vi si presta assai acconciamente. Da ultimo le operazioni aritmetiche, le quali non di rado sono intrigatissime, valendosi dell'Algebra ne riesce assai facile l' eseguimento. Il fin qui detto, per mio avviso, sarà bastevole a verificare quanto affermai poco sopra.

Ogni scienza, a detta d' un gran matematico, ha un suo linguaggio, e l'Algebra n' ha pur dessa un tutto suo proprio, e specialissimo. È da farvi sopra un lungo e sudato esercizio, chi vuol rendersi esperto in esso. Laonde sarà buono il cominciare dal far tosto conoscere un siffatto linguaggio.

CAPO PRIMO.

Dei segni e delle espressioni algebriche.

§. 1. Le lettere dell' alfabeto perchè facili a descriversi e conosciute a ciascuno, meglio che ogn' altro segno furono scelte a fine di rappresentare tutte specie di quantità. Però in Algebra i caratteri *a*, *b*, *c*, ecc. non sono adoperati per esprimere le varie modulazioni della voce umana, sì bene a dinotare le diverse quantità o grandezze. Poco sopra già è detto, e qui giova ridirlo, che tali figure per se non han valore determinato, ma sta in nostro arbitrio a farle valere quel più che n' aggrada. Una quantità o più quantità rappresentate con lettere si nomina *espressione algebrica*.

§. 2. L' addizione o sottrazione, che sulle diverse lettere non si possono eseguire a una stessa guisa che sui numeri, vengono indicate coi segni + (*più*), e — (*meno*). Quindi l'espressione $a+b-c$ significa, che le quantità a e b voglionsi raccogliere in una, e che dalla loro somma si ha da sottrarre la quantità c.

Le quantità cui va innanzi il segno + son dette *positive*, e chiamansi *negative* se loro precede il segno —.

Queste han natura del tutto opposta alle prime. Ove le quantità non abbian segno, che lor preceda vi si sottintende il + e son perciò sempre positive.

§. 3. Le operazioni suaccennate si possono ancora per gran parte effettuare con solo i segni + e —. Così se a deve unirsi ad a, si può scrivere $a + a$ od anche $2a$; se con $2a$ si vuol congiungere a, si avranno $3a$. Parimente ove da $5a$ si levino $3a$ non s'avrà più che $2a$, ecc. In questi casi i numeri 2, 3, 5, che si premettono alle lettere han nome di *coefficienti* ed esprimono, che la quantità a vuol esser presa le tante volte quante sono le unità in essi contenute.

E per essere a un medesimo, che $1a$, chiaro si vede, che ad una lettera non preceduta da verun coefficiente è sottinteso il coefficiente 1.

§. 4. La moltiplicazione viene espressa col segno $\times$. A cagione di brevità si adopera in sua vece un punto, il qual pure si può tralasciare. Giacchè si è fatta convenzione, che le quantità debbano intendersi moltiplicate l'una per l'altra qualvolta sieno scritte di seguito senza frapporvi alcun segno. Così le espressioni $a\times b$, $a.b$, ab dinotano egualmente a moltiplicato per b. Della stessa guisa, scritte abc l'una appresso dell'altra, è indizio, che a vuol moltiplicarsi per b, ed ab per c.

Qui pure è da sapere, che essendo b moltiplicato a uno stesso che $b\times a$, in luogo di ab si potrà scrivere ba; e a vece di mnp sarà

pur lecito dire pnm, ecc. Con tutto ciò si faccia pure avvertenza, che nello scrivere le lettere moltiplicate fra esse loro è la miglior cosa tenersi all'ordine alfabetico; poichè in tal forma adoperando più presto si riconosceranno i termini somiglianti.

§. 5. Se le quantità da moltiplicarsi fossero indicate con più lettere unite per mezzo dei segni + e —; caso p. e. che s'avesse ad accennare la moltiplicazione di $a+b$ per $c-d$, scrivendo $a+bc-d$ si esprimerebbe soltanto la moltiplicazione di b per c. Per ischivare un siffatto inconveniente basterà chiudere tra parentesi le quantità da moltiplicarsi, oppure tirarvi sopra una linea alla maniera seguente $(a+b)\ (c-d)$, ovveramente $\overline{a+b}\times\overline{c-d}$. Ove al prodotto si avesse ad aggiugnere o togliere una quantità, questa la si deve mettere fuori linea o parentesi, scrivendo $(a+b)\ (c-d)+m$, ed $(a+b)\ (c-d)-m$, ecc.

§. 6. Spesso incontra, che una quantità dee moltiplicarsi più e più volte per se stessa.

In tale occorrenza in vece di ripetere tante volte la medesima lettera, è convenzione di scriverla una volta sola, ponendo in alto alla destra di essa il numero, che dinota le quante volte dovrebb' essere scritta. Così a luogo di aa si scrive a^2, in vece di bbb si pone b^3, per $aacccc$ è lecito scrivere a^2c^4, ecc.

I numeri 2, 3, 4 ecc. posti in alto a destra delle lettere son detti *esponenti*. E perchè x^2 torna a una stessa cosa, che x moltiplicato una volta per se stessa, a^3 è il medesimo che a moltiplicato le due volte per se stessa ecc., s' intende, che una quantità va moltiplicata tante volte per se medesima quante unità, salvo una, sono contenute nel suo esponente.

La quantità a non essendo scritta che una volta vale uno stesso che a^1; quindi ad una lettera priva d' esponente si sottintende sempre l' esponente 1.

§. 7. A questo punto cadrà bene l' osservare la differenza, che passa fra i coefficienti e gli esponenti; gli uni esprimon la somma; questi la moltiplicazione. Così $3a$ vuol dire $a+a+a$; laddove a^3 vale quanto $a\times a\times a$.

Perciò è da guardarsi, non sieno scambiate o confuse le espressioni $2ab^2$, a^2b^3, $2a^3b$ ed altre tali che in generale sono di valore assai differenti.

§. 8. Per dinotare la divisione di una quantità per un' altra, si colloca la prima sopra la seconda ponendo fra di esse una linea, oppure si segnano due punti tra l' una e l'altra scritte di seguito. Per tal modo le espressioni $\frac{a}{b}$ ed $a:b$ (a diviso b) indicano tutte e due che a vuolsi dividere per b. E qui ancora si vede, che se $a+b$ si avesse a dividere per $c-d$, scrivendo $a+b:c-d$ s' accennerebbe soltanto alla divisione di b per c, e non già a quella di $a+b$ per $c-d$. Però quando si usano i due punti all' uopo suddetto, convien

riporre tra parentesi le quantità da dividersi, notando $(a+b):(c-d)$. Nel resto più comunemente si scrive $\frac{a+b}{a-c}$, e le espressioni simiglianti a questa diconsi *frazioni algebriche*.

§. 9. Le quantità abc, $3m^2p$, ecc., le cui lettere non sono unite dai segni $+$, o $-$ chiamansi *monomie*; ed han nome di *polinomie* ove portino tali segni, come $a+b$, $m^2+p^2-2xy^2$, ecc. Nei polinomj ogni monomio si conta per un *termine* e si dicono particolarmente *binomj*, *trinomj*, *quadrinomj*, ecc. le espressioni di 2, 3, 4 termini ecc.

Quante sono le lettere (ancorchè uguali) onde componsi un monomio, altrettante ne sono le *dimensioni*. Ma se il monomio è una frazione le dimensioni del denominatore ne distruggono egual porzione nel numeratore. Quindi i monomj a, $2b$, $\frac{ab}{c^3}$ hanno solo una dimensione, i seguenti abc, $2xy^2$ $\frac{3x^5}{2y^2}$ sono di tre ecc. I polinomj sono *omogenei* se hanno in tutti i termini egual numero di dimensioni. Così $a^2+2ab+\frac{3c^3}{m}$, è un trinomio omogeneo; ciò che non è $a^3+2a^2+\frac{3x^2}{y}$.

§. 10. Del frequente nei polinomj si trovano dei *termini simili*, che si possono raccogliere in un termine solo, o che a vicenda si distruggono: sono termini simili quelli, che hanno le stesse lettere cogli stessi esponenti; così $6a^3b-2a^3b+4a^3b$, si riduce a $8a^3b$.

L'operazione, che si fa a fine di rendere più semplici i polinomj, caso che ciò sia possibile, vien detta *riduzione*. Se nell'espressione $2a^2+3ab+a^2-3ab$ pongasi mente che $2a^2$, ed a^2 formano $3a^2$, e che $3ab$ e $-3ab$ s'annullano l'un l'altro; si vedrà che essa riducesi a $3a^2$. Il simile si può fare d'una infinità di polinomj. In generale; ogni qualvolta un s'avviene in termini simili, o questi portano un medesimo segno, e ciò occorrendo, a fin di ridurli si raccolgono in uno i coefficienti e si fa precedere alla somma lo stesso segno che prima; o è diversità nei segni, ed in tal caso i loro coefficienti si sottraggono premettendo al residuo che si abbia, il segno del coefficiente maggiore. Così $5a+4a=9a$; $6a-4a=2a$; $3a-3a=o$. Questi principj sono evidenti di per se, nè quindi fa d'uopo recarne la dimostrazione.

CAPO SECONDO.

Delle operazioni aritmetiche sulle espressioni algebriche.

ADDIZIONE.

§. 11. Nel fare l'addizione delle espressioni algebriche si proceda alla maniera seguente. Pongansi i termini l'uno dopo l'altro ciascuno col suo proprio segno, e se ve n'ha dei simili se ne faccia la debita riduzione.

Così la somma di $a+b$ con $a-b$ è $2a$. Ed in pari modo nel seguente

Esempio.

$$\begin{array}{r} 2a^3c-3a^2c \\ 4a^3c+4ax^3 \\ -2ax^3+4a^2c \\ \hline \end{array}$$

Somma : $2a^3c-3a^2c+4a^3c+4ax^3-2ax^3+4a^2c$.

Riduzione : $6a^3c+a^2c+2ax^3$.

§. 12. Se le quantità da sommarsi fossero in forma di frazione si adoprerebbe similmente. Raccogliendo i numeratori (vedi in Arit.) di $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}$ si ottiene $\frac{a+b+c}{m}$.

Ciò suppone che sia uno stesso il denominatore di tutte le frazioni; posto che fosse diverso, l'operazione si comincierà dal ridurle a una medesima denominazione giusta le regole assegnate in Aritmetica, e poscia si condurrà a termine nel modo che è detto.

SOTTRAZIONE.

§. 13. La sottrazione delle espressioni algebriche si opera cambiando i segni ai termini, che si vogliono sottrarre. Per tal modo se da a voglio levare $b-c$, scrivo a residuo $a-b+c$, mutando il segno $+$ di b in $-$, e il segno — di c in $+$. Usando di tal regola si vedrà, che da $a^4+2a^3c+mn^2$ sottraendo $a^4-2a^3c+2m^2n^2$ si ha per residuo $a^4+2a^3c+m^2n^2-a^4+2a^3c-2m^2n^2$; ossia, fatta la riduzione, $4a^3c-m^2n^2$.

§. 14. La ragione d'un così fatto metodo s'intenderà assai di lieve, ponendo mente, che se da a si vuol sottrarre $b-c$ non può aversi a residuo $a-b-c$; poichè in tal guisa operando se ne caverebbe fuori tutto il b, e tutto il c. Ciò che non si vuol fare; anzi non è pur da sottrarsi tutto il b, ma solo b diminuito di c. Perciò il giusto residuo si otterrà levando il b, indi aggiugnendo il c il quale non si avea a tor via, e notando $a-b+c$ come prescrive la regola. In verità ove dal numero 9 si voglia sottrarre $7-3=4$ si avrà $9-7+3=5$.

§. 15. Per la sottrazione dei rotti algebrici è da procedere come negli interi; onde per togliere $\frac{abc-m^3}{n^2}$ da $\frac{abc+m^3}{n^2}$ si scriverà $\frac{abc+m^3-abc+m3}{n^2}$ ossia $-\frac{2m^3}{n^2}$.

Che se hanno diversità nei dominatori si riducano prima a dominatore uguale, e poscia si faccia a modo che sopra.

Nota. Qualche volta la sottrazione non si eseguisce; ma si accenna soltanto. Ciò occorrendo, la quantità da sottrarsi si chiude fra parentesi e le si premette il segno —. Onde per esprimere che $b-c$ va tolto da a, si scrive $a-(b-c)$.

MOLTIPLICAZIONE.

§. 15. A comporre i termini di qualsiasi espressione algebrica concorrono i *segni*, i *coefficienti*, le *lettere* e gli *esponenti*: e nella moltiplicazione conviene aver riguardo a tutti e quattro questi elementi, per così nominarli.

Quanto ai segni, o i termini da moltiplicarsi hanno entrambi un medesimo segno, o l'han diverso. Nel primo caso il prodotto è positivo, e negativo nel secondo.

Passando ai coefficienti, è d'avere in mente, che essi debbono moltiplicarsi fra loro, ponendo il risultato per coefficiente nel prodotto che riesce dalla moltiplicazione dei termini.

Rispetto alle lettere ed agli esponenti conviene scrivere le prime l'une di seguito all'altre coi rispettivi loro esponenti, tenendo ben fermo, che, se sono uguali a vece di replicarle basta, che le si scrivano una volta sola con un esponente, che sia la somma dei loro esponenti primitivi.

§. 16. L'esattezza di queste regole non è difficile a dimostrarsi.

E primieramente, riguardo ai segni, il prodotto di $+4$ per $+3$ o (ciò che torna a uno stesso) $+4$ preso 3 volte è manifestamente $+12$; Dunque in generale il prodotto di una quantità positiva $+a$ per un' altra $+b$ dev' essere similmente $+ab$. Il prodotto di -4 preso per $+3$ volte, ossia la somma di -4 preso 3 volte, è -12; dunque in pari modo $-a\times+b=-ab$. Se $+4$ vogliasi sottrarre una volta, o, ciò che è il medesimo, prendersi -1 volta si scrive -4; or bene è da sottrarsi 3 volte, ossia moltiplicansi per -3, quindi si scrive -12; perciò $+a\times-b=-ab$. In fine, se $-a$ si moltiplichi per $-b$ ne verrà $+ab$. Di fatto $a-a=o$, moltiplicato per $-b$ non produce che zero; ora $a\times-b=-ab$; convien dunque che $-a\times-b=ab$ perchè ne risulti $-ab+ab=o$; d' altro modo un tal prodotto non si ridurebbe a zero.

Rispetto ai coefficienti è chiaro, che $4a\times3$ ossia $4a$ preso 3 volte, dà $12a$; quindi praticando la moltiplicazione su quantità algebriche, si deve moltiplicarne i coefficienti.

Venendo alle lettere; è noto, che basta scriverle di seguito perchè s'intendano moltiplicate tra esso loro. Caso che fossero eguali, e si avesse a moltiplicare p. es. a^3 per a^2, facendo osservazione che $a3$ è $=aaa$, e che a_2 è $=aa$ ben si vede, che il prodotto debb' essere $aaaaa$ ossia a^5. Così da a^7 per a^4 si ricaverà a^{11} ecc. tutto conforme alla regola.

§. 17. Produciamo un qualche esempio onde ne venga chiarezza ai precetti sopra stabiliti.

Vogliasi il prodotto di $3a^2b^3c$ per $2ab^2$. I segni dei termini essendo uguali il prodotto riuscirà positivo; dai coefficienti 3 e 2 moltiplicati ne viene 6 per coefficiente del prodotto; $a^2\times a$ dà a^3, $b^3\times b^2$ produce b^5; perciò il risultato sarà $6a^3b^5c$.

§. 18. A fin di eseguire la moltiplicazione d' un polinomio per un monomio non si ha che a moltiplicare ad uno ad uno ciascun termine della prima quantità per l' intero monomio. Poniamo che si ricerchi il prodotto di $2x^2y-3xy^2-y^3$ per $4xy$.

Innanzi tratto è da scrivere si fatte quantità nella forma seguente:

$$\begin{array}{l} 2x^2y-3xy^2-y^3 \\ 4xy \\ \hline 8x^3y^2-12x^2y^3-4xy^4 \\ \hline \end{array}$$

Poscia è da procedere alla moltiplicazione del primo termine $2x^2y$ per $4xy$.

Il prodotto $8x^3y^2$, che ne risulta, si scriva in debito luogo. Più oltre si moltiplichi per $4xy$ il secondo termine $-3xy^2$, e si noti $-12x^2y^3$. Finalmente $-y^3$ moltiplicato per $4xy$ dà $-4xy^4$ per ultimo termine del prodotto, che è perciò $8x^3y^2-12x^2y^3-4ay^4$.

§. 19. Da ultimo; ove sia da moltiplicarsi un polinomio per un polinomio, si converrà operare la moltiplicazione della quantità superiore per tutti i termini dell' inferiore. La somma dei prodotti parziali, ridotta, se occorre, formerà l' intero prodotto.

Supposto, che si volesse moltiplicare la quantità $a+2b$ per $2a-2b$: in prima si dispongano i termini nel modo che segue:

$$\begin{array}{l} a+2b \\ 2a-2b \\ \hline 2a^2+4ab \\ \quad\;\; -2ab-4b^2 \\ \hline 2a^2+2ab-4b^2 \end{array}$$

Quindi è da farsi tosto a moltiplicare $a+2b$ per $2a$, e a scrivere debitamente il prodotto $2a^2+4ab$. Più innanzi, si moltiplichi $a+2b$ per $-2b$, e se ne scriva in giuste colonne il prodotto $-2ab-4b^2$.

Fatta la riduzione di queste quantità, se ne avrà per totale prodotto $2a^2+2ab-4b^2$.

Operando in simigliante maniera si troverà, che $x^3+x^2y+2xy+y^3$ moltiplicato per $x-y$ produce x^4-y^4.

§. 20. La moltiplicazione si fa sui rotti algebrici a una stessa guisa che sulle frazioni dei numeri, cioè a dire con moltiplicare tra essi loro i numeratori, e così del pari i denominatori;

p. es. $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$; $\frac{a+b}{c-d}\times\frac{a-b}{c+d}=\frac{a^2-b^2}{c^2-c^2}$ ec.

Questa regola, e le seguenti rispetto alla divisione, riconoscono il lor fondamento dai medesimi principj, che quanto ai numeri furono già stabiliti in Aritmetica.

DIVISIONE.

§. 21. Nel dividere le quantità algebriche convien pure riguardare ai segni, ai coefficienti, alle lettere ed agli esponenti.

Rispetto ai segni hanno luogo le medesime regole che per la moltiplicazione (v. §. 15).

Quanto ai coefficienti voglionsi dividere come in Aritmetica.

Per ciò che s'attiene alle lettere è regola di scrivere al quoziente quelle solo, che nel dividendo non sono comuni al divisore, e via togliere le altre, le quali e si trovano in ambi i termini, ed hanno un egual esponente. Che se han diversità negli esponenti si dee notare al quoto la lettera stessa con tal esponente che agguagli la differenza, la qual passa tra l'esponente del dividendo, e quello, che è nel divisore.

§. 22. Le regole prescritte pur ora risultano da quelle che furon date rispetto alla moltiplicazione (v. §. 16). E prima di farsi alle prove giovi recarsi a mente, che un prodotto diviso pel moltiplicatore dà per quoziente il moltiplicando. Ciò posto, ragioniamola per tal forma. Si è veduto, che $+a\times+b$ dà $+ab$, e così del pari che $+a\times-b$ produce $-ab$, perciò da $\frac{+ab}{+b}$ risulterà $+a$, e similmente da $\frac{-ab}{-b}$ ne verrà $+a$. Ciò è un dire; il dividendo e il divisore con segni uguali danno un quoziente positivo. Non altrimenti; essendo

$-a \times +b = -ab$, e $-a \times -b = +ab$, le espressioni $\frac{-ab}{+b}$, e $\frac{+ab}{-b}$ saranno tutte e due eguali a $-a$: cioè se nel dividendo non v' ha il medesimo segno che nel divisore, il quoziente, che quindi se ne ritrae, vuol essere negativo.

Similmente, poichè $4a \times 3$ produce $12a$, $\frac{12a}{3}$ deve riprodurre $4a$: il che dice, aversi a dividere il coefficiente, che si trova nel dividendo per quello del divisore secondo che prescrive la regola.

Non d' altro modo; dal moltiplicare ab per cd se ne ricava il prodotto $abcd$; dunque $\frac{abcd}{cd}$ darà ab; cioè le lettere a, b, che il dividendo non ha comuni col divisore si devono scrivere nel quoziente, e le altre, che sono in ambi termini e portano un esponente uguale, non vogliono essere notate.

E qui cade bene l' osservare che da qualsivoglia termine diviso per se stesso ne viene per quoziente l' unità. Così $\frac{a^4}{a^4} = 1$, $\frac{b^3}{b^3} = 1$. Ora conforme alla regola degli esponenti $\frac{a^4}{a^4} = a^{4-4} = a^0$; $\frac{b^3}{b^3} = b^{3-3} = b^0$.

Perciò a^0, b^0, ed in generale ogni termine che abbia l' esponente *zero* è cifra significativa di uno.

Alla perfine, essendo $a^3 \times a^2 = a^5$, sarà $\frac{a^5}{a^2} = a^3$; così pure, essendo $a^7 \times a^4 = a^{11}$

sarà $\frac{a^{11}}{a^4} = a^7$; il che val quanto: nel farsi a dividere una lettera per se stessa è da notare al quoto la lettera medesima ponendole ad esponente la differenza degli esponenti, che essa ha nel dividendo, e nel divisore. La regola è per ciò stesso confermata.

§. 23. Applichiamo queste regole alla divisione d' un monomio per un' altra quantità pure monomia.

Vogliasi dividere la quantità $6a^2bc^3d$ per $2abc^2$ l' operazione ha da avere principio dal collocare i termini con aggiustatezza; per tanto si proceda nel medesimo tenore, che per la divisione dei numeri. Sia adunque

$$\begin{array}{r|l} 6a^2bc^3d & 2abc^2 \\ \hline -6a^2bc^3d & 3acd \end{array}$$

Così ordinate la quantità, mi fo a dividerle; in prima osservo, che i segni, i quali precedono i due monomi sono i medesimi, e quindi il loro quoziente ha da essere positivo. Però scrivo $+$ il quale si può anche tralasciare come altrove si disse. Passo a far divisione del coefficiente 2 per 6, e ne ritraggo il 3 che segno per coefficiente del quoto. Poi, sottratto l' esponente 1, che ha la lettera a nel divisore dall' esponente 2 che essa ha nel dividendo pongo nel quoziente a mettendovi ad esponente il residuo 1, oppure il trascuro, notando a senza più altro. Questo si può fare lecitamente, perchè ciascuna lettera scritta così semplicemente vi si sottintende ad esponente l'unità. Non segno la lettera b, che è nel dividendo e nel divisore con esponente eguale, giacchè $b:b=1$. Togliendo l'esponente 2 di c dall'esponente 3, si ottiene a residuo 1, onde scrivo c. Finalmente pongo nel quoziente la lettera d che non è comune al divisore e tutto è compiuto. Adunque l'intero quoto è $3acd$. E nel vero il divisore $2abc^2$ moltiplicato pel quoziente $3acd$ produce il dividendo $6a^2bc^3d$.

Operando in somigliante guisa si troverà che $-4a^2x^3y^3$ diviso per $2a^2y^2$ dà il quoziente $-2x^3y$.

§. 24. Può occorrere, che nel divisore v'abbia alcuna lettera la quale, o manchi al dividendo, oppure vi si trovi, ma con un minore esponente. Nel primo caso una tal lettera si scrive così come sta sotto al quoto, il quale però avrà forma di frazione, e nel secondo vi si pone un esponente, che pareggi la differenza de' suoi esponenti primitivi. Quindi il quoziente della quantità $-15a^2dx^3y$ divisa per $3acx^5y$ è $-\frac{5ad}{cx^2}$.

Nota. A questo punto gioverà il notare, che una quantità con esponente negativo è uguale ad una frazione la quale abbia per numeratore l'unità, e a denominatore la stessa quantità con il medesimo esponente, ma negativo. In fatti, posto per es. b^{-3}, si osservi

che b^{-3} ossia b^{0-3} è il quoto che si ha dividendo b^0 per b^3 (V. la nota al §. 22). Ora sì fatto quoziente è parimente eguale a $\frac{b^0}{b^3}$ ossia ad $\frac{1}{b^3}$. Dunque $b^{-3}=\frac{1}{b^3}$, e però ecc.

§. 25. Ove la quantità da dividersi è polinomia, ed è monomio il divisore, l'operazione si eseguisce dividendo ad uno ad uno i termini di quella per l'intero monomio siavi l'espressione $4a^2b^3c-3ab^2c^3-2ab^2$, la quale si vuol divisa per $2ab^2$. In prima si pongano in debito ordine tutte e due le quantità

$$\begin{array}{r|l} 4a^2b^3c-3ab^2c^3-2ab^2 & 2ab^2 \\ \cline{2-2} -4a^2b^3c+3ab^2c^3+2ab^2 & 2abc-\frac{3}{2}c^3-1. \\ \cline{1-1} 0 \quad\; 0 \quad\; 0 & \end{array}$$

Si divida innanzi tutto il primo termine $4a^2b^3c$ per $2ab^2$, e si noti al quoto il risultato $2abc$. Poi è da proseguire dividendo il secondo termine $-3ab^2c^3$, e segnando $-\frac{3}{2}c^3$ nel quoziente. Si passi a dividere $-2ab^2$ per $2ab^2$ e se ne scriva il quoziente -1. Il quoto per conseguenza è $2abc\frac{3}{2}c^3-1$.

§. 26. Ora supponiamo vogliasi far divisione d'un polinomio per un altro polinomio. Rara cosa è, che tal divisione riesca senza residuo, pure chi si fa a tentarla e vuol andar per la più breve tenga fermo, che innanzi tratto è da ben *ordinare* per una stessa lettera il dividendo e il divisore. Mi spiego; presa qualcuna lettera, la qual si trovi in tutte e due le quantità, i termini di queste hannosi a disporre di guisa, che sia prima quello, dove una tal lettera ha il suo maggior esponente, e vi tenga appresso il termine, dove ha l'esponente prossimamente minore e così dei successivi. È lecito l'*ordinare* per qualsiasi lettera, ma è la miglior cosa antiporre quelle lettere che non si trovano con esponenti eguali in più termini, perchè non ne venga dubbiezza quale di essi abbiasi a mandare innanzi e quale dopo. Veniamo agli esempi e facciam caso, che s'abbia a dividere

$$11a^5c^3-12a^4c^4-2a^6c^2$$
$$\text{per } -3a^2c^2+2a^3c.$$

In tal caso si può indifferentemente ordinare per a o per c, e ove si voglia per a converrà scrivere

$$-2a^6c^2+11a^5c^3-12a^4c^4,$$
$$\text{e } 2a^3c-3a^2c^2.$$

Ciò operato, si cominci dal collocare ogni termine per convenevol maniera

$$\begin{array}{lll|l}
-2a^6c^2 & +11a^5c^3 & -12a^4c^4 & 2a^3c-3a^2c^2 \\ \cline{4-4}
-2a^6c^2 & +3a^5c^3 & & -a^3c+4a^2c^2 \\
+ & - & & \\ \cline{1-3}
 & +8a^5c^3 & -12a^4c^4 & \\
 & +8a^5c^3 & -12a^4c^4 & \\
 & - & & \\ \cline{1-3}
 & \circ & \circ & \\ \hline\hline
\end{array}$$

A fine, che l'operazione riesca ben fatta conviene farsi a dividere il primo termine $-2a^6c^2$ pel primo termine $2a^3c$ del divisore, e poscia notarne il quoziente $-a^3c$. Appresso è da moltiplicare $-a^3c$ per l'intero divisore, e quindi sottrarne il prodotto $-2a^6c^2-3a^5c^3$ dal dividendo, e se n'avrà a residuo $8a^5c^3-12a^4c^4$.

Il termine $8a^5c^3$, che è primo nel detto residuo si divida pel primo termine $2a^3c$ del divisore, ed il risultato $+4a^2c^2$ si noti nel quoziente.

Da ultimo $+4a^2c^2$ vuolsi moltiplicare per l'intero divisore, e toglierne dal dividendo il prodotto che quindi ne riesce, cioè $8a^5c^3-12a^4c^4$.

Posto che si avesse un qualche altro residuo si prosiegue l'operazione in eguale tenore cioè a dire; si opera in prima la divisione del primo termine di tal residuo pel termine che è primo nel divisore.

Quindi si ha da moltiplicare il quoziente avuto per tutto quant'è il divisore, e poscia sottrarre dal dividendo il prodotto, che indi risulta, e così via via continuare sinchè tutti i termini del dividendo rimangano annullati. Nel caso presente poichè nulla rimane l'operazione è terminata, e il quoziente esatto è $-a^3c+4a^2c^2$.

Questa regola è la medesima, che fu prescritta in Arit. rispetto alla divisione dei numeri da più cifre, nè per conoscerne la giustezza è da far altro, che rileggere quanto ivi a tal proposito fu discorso.

Adoperando con essa alla mano, non si renderà difficile il ritrovare, che il quoziente di x^4-y^4 diviso per $x-y$ è $x^3+x^2y+xy^2+y^3$; e così d'altri molti.

§. 27. Qualvolta la divisione non può riuscire senza resto, fa mestieri o accennarla scrivendo le quantità in forma di frazione, ovvero, cominciata che la sia, proseguirla finchè vi è luogo, e scrivere il residuo a modo che una frazione. Così a^2-2x^2 diviso per $a-x$ dà per quoto $a+x-\dfrac{x^2}{a-x}$ e nel fatto

$$
\begin{array}{ll|l}
a^2 \ldots\ldots & -2x^2 & a-x \\
\cline{3-3}
+a^2-ax & & a+x-\dfrac{x^2}{a-x} \\
- \quad + & & \\
\hline
+ax & -2x^2 & \\
+ax & -x^2 & \\
- & + & \\
\hline
 & -x^2 & \\
\end{array}
$$

§. 28. A dividere le frazioni algebriche basta il moltiplicarne i termini a rovescio. Quindi il quoziente di $\dfrac{a}{c}$ diviso $\dfrac{b}{d}$ sarà $\dfrac{ad}{bc}$; e dividendo $\dfrac{3a^2}{b}$ per $\dfrac{b+c}{2ah}$ si ha $\dfrac{6a^3h}{b^2+bc}$ per quoziente.

Nota. I rotti algebrici si riducono ad uno stesso denominatore, e così parimente gl'interi misti a frazioni si trasformano in soli rotti per somigliante maniera che in Arit. si opera sulle frazioni e sui numeri misti.

Di qui si conoscerà pure il modo di ben condurre le quattro operazioni sulle espressioni algebriche, le quali comprendono interi e rotti ecc.

CAPO TERZO.

Delle equazioni di primo grado.

§. 29. Comecchè poche sieno le regole Algebriche, di che finora si è discorso, pure bastano allo scioglimento di ben molte questioni, le quali non si risolverebbero così agevolmente con solo le operazioni aritmetiche.

§. 30. *Risolvere* un *problema* altro non è che trovare il valore di una o più quantità incognite, dato che si abbiano alcune relazioni che esse hanno con altre quantità conosciute. Queste relazioni son dette le *condizioni* del problema.

Tutta l'arte per riuscire a un tal effetto consiste nel rappresentare dette relazioni nella maniera più semplice; e ciò si fa con ridurle ad espressioni o *formole* di eguaglianza tra loro, e col variare poi così fatte espressioni di guisa che in esse ciascuna delle quantità incognite riesca uguale a quantità conosciute. In cotal modo si perviene a determinare il valore delle quantità ignote ed è fatta la *risoluzione del problema.*

§. 31. Le formole di uguaglianza che esprimono le relazioni tra le quantità note, ed incognite diconsi *equazioni*: ed il rappresentare con esse le condizioni d'un problema chiamasi *mettere il problema in equazione.*

Si avverta che le quantità scritte a sinistra del segno di eguaglianza $=$ formano il primo

membro dell'equazione, e quelle notate dopo di esse a destra ne costituiscono il secondo. Alla detta opera, da cui si vuol cominciare la risoluzione del problema, è mestieri fino discernimento e soda riflessione, e più assai d'ogni regola vale un lungo e continuato esercizio.

Soprattutto fa d'uopo scegliere una lettera la quale rappresenti il valore dell'incognita ed eseguire sovressa lettera le medesime operazioni che si farebbero sopra un qualche numero cognito per verificare se esso è adatto a risolvere il problema.

Sia proposto a cagion d'esempio il seguente problema, il quale è di tutta semplicità.

« Genova e Milano contano in somma 215,000 persone e il numero degli abitanti di Genova ascende a $\frac{2}{3}$ della popolazione di Milano. Si vuol sapere quante persone vi sieno e nell'una e nell'altra città ».

Se venisse detto, che gli abitanti di Milano sono 120,000, per verificare l'esatezza di questo numero, si farebbe discorso nella forma seguente: poichè Milano ha 120,000 abitanti, Genova che ne ha solo $\frac{2}{3}$ deve contenerne 80,000; ora le due città prese insieme ne contano 215,000; dunque 120,000, e 80,000 avrebbero a dare 215,000, ma non producono che 200,000; in conseguenza il numero supposto 120,000 non risponde adequatamente.

L' operazione che si è fatta sul 120,000 si rinnovi sulla lettera x, presupponendo che questa lettera esprima il numero degli abitatori di Milano. Poniam caso che Milano abbia un numero x di persone, Genova ne conterà $\frac{2}{3}$ di x; perciò $x+\frac{2x}{3}=215{,}000$ sarà eguale all' intera popolazione accennata. Per sì fatto modo il problema si è ridotto in equazione.

§. 32. Il numero degli abitanti in Milano venne espresso con la lettera x, ma poteasi denotare con qualunque altra.

Nondimeno è da tener fermo che l' uso comune porta di significare colle ultime lettere dell'alfabeto x, y, z le quantità incognite e di rappresentare coi numeri o con le prime lettere a, b, c ecc. le quantità *date* o conosciute.

§. 33. Come si è ottenuta l' equazione, conviene darle tal forma che l' incognita sola da una parte resti uguale a quantità conosciute, il che è *sciogliere l' equazione.*

Qui tornerà bene il fare avvertenza che le equazioni le quali si ricavano dai varj problemi non sono tutte di una maniera, e vengono perciò distinte in *gradi* assai tra loro diversi.

Le equazioni ad una sola incognita si distinguono per *gradi* che variano secondo il maggior esponente che l' incognita ha nel suo proprio termine. Quindi $ax=bc$; $x+10=36$ sono equazioni di *primo grado*; $a^2+p=q$; $ax^2+bc=a+8$ appartengono al *secondo grado*; $^3y+my+ny=c$ è una equazione di *terzo grado.*

Caso poi che si trovino più incognite in una stessa equazione per giudicarne il grado vuolsi attendere alla maggior somma degli esponenti delle incognite di uno stesso termine. Così $ax-b=44$ è del primo grado; $xy+x=65$ è del secondo; $x^3+ay^2=58$, $xyz+my=24$ s' attengono al terzo grado.

§. 34. Non sono gran fatto difficili a praticarsi i metodi che si assegnano per venire in conoscimento del valore, che le quantità ignote ritengono nelle equazioni di primo e secondo grado: ciò che non è ove si tratti di equazioni del terzo grado e più se di ordine superiore a cui risolvere si ha difetto di metodi generali.

Parliam tosto delle equazioni di primo grado, che poscia toccheremo quelle del secondo e tanto basterà al fine propostoci nel comporre questi elementi.

§. 35 Sia data l' equazione $3x+6-\frac{2x}{5}=52-2x$ e vogliasi per essa trovare il valore di x.

In prima si converrà levare dall' incognita il numero che la divide, o come suol dirsi *liberare l' equazione dai denominatori.* A tal fine si ponga mente, che due quantità pari non cessano di esser tali se vengano moltiplicate per la stessa quantità; dunque, poichè $3x+6-\frac{2x}{5}$ è $=52-2x$, sarà anche il quintuplo della prima eguale al quintuplo della seconda, cioè $3x\times5+6\times5-\frac{2x}{5}\times5=52\times5-2x$

$\times 5$, ossia $15x+30-2x=260-10x$, oppure, fatta la riduzione, $13x+30=260-10x$, equazione in che più non ha luogo il denominatore 5.

Quindi *per togliere un denominatore da un termine d'un' equazione è da moltiplicare tutti gli altri termini per esso denominatore.*

Se poi nell' equazione fossero comprese più frazioni, queste veranno tolte, moltiplicando il prodotto di tutti e quanti i dominatori per ciascun termine dell'equazione. Ciò s' intenderà meglio per le cose, che saran dette qui sotto.

Del frequente incontra che al fine dell' operazione l' incognita riesce negativa, e in tal caso è lecito farla positiva purchè sieno ancora mutati i segni ad ogni termine del secondo membro dell' equazione. Giacchè il cambiare i segni a tutti i termini di una equazione torna a un medesimo che moltiplicarle per -1, ossia per una stessa quantità, e questo non toglie l' equazione, come poco sopra si è accennato.

§. 36. Dopo aver fatti scomparire i denominatori da una data equazione è d' uopo ridurre in un membro tutti i termini dove entra l' incognita, e trasportare nell' altro membro i termini conosciuti. Si viene all' intento facendo considerazione che non è tolta l' eguaglianza tra due quantità per questo che ad esse venga aggiunta o levata una quantità eguale.

Di qui è che l' equazione $13x+30=260-10x$ si conserverà pur tuttavia, eziandio che si aggiunga ad entrambi i membri $10x$. Onde si avrà $13x+30+10x=260-10x+10x$, ossia $13x+30+10x=260$. In tal maniera la quantità $-10x$ che era nel secondo membro si trasportò nel primo dove ora si trova, ma con segno contrario. Secondo lo stesso principio, poichè $13x+30+10x=260$, sarà, tolto via 30 da ciascun membro, $13x+30+10x-30=260-30$, ossia, riducendo, $23x=230$.

Quindi si vede che il 30 si è trasportato dal primo al secondo membro dell' equazione con solo cambiare in $-$ il segno $+$ da cui era preceduto. Il fin qui operato conduce a ben comprendere la regola generale; *qualunque termine, con solo mutarne il segno, può venir trasportato d' uno in altro membro dell' equazione senza nè punto alterarla.*

Nello sciogliere un'equazione talora è meglio l' eseguire un sì fatto trasportamento innanzi passare all' operazione accennata nel paragrafo precedente.

§. 37. Ora che l' equazione fu ridotta a $23x=230$ si vuol togliere dall' incognita il coefficiente 23, e a ciò si riesce, riguardando che non è distrutta l' eguaglianza tra due quantità perchè entrambe vengano divise pel numero stesso. Dunque poichè $23x=230$, sarà $\frac{23x}{23}=\frac{230}{23}$, ossia $x=\frac{230}{23}=10$; onde *si leva all' incognita il suo coefficiente dividendo per esso gl' altri termini dell' equazione.*

§. 38. Operando in così fatta guisa siam venuti a segno da risolvere l' equazione proposta $3x+6-\frac{2x}{5}=52-2x$; ciò è un dire, che si è ritrovato il valore dell' incognita $x=10$. Similmente per le medesime operazioni sarà agevole trovare il valore di x nell' equazione $x+\frac{2x}{3}=215{,}000$ che abbiamo ricavata dal proproblema recato al §. 31. Però si moltiplichi dessa per 3, a fine sia tolto il denominatore (§. 35.), e n' avremo $3x+2x=645{,}000$, ovvaro $5x=645{,}000$. Ora, fatto scomparire il coefficiente dell' incognita (§. 37.), si otterrà $x=\frac{645{,}000}{5}=129{,}000$. Sono dunque 129,000 gli abitanti di Milano; saranno perciò 86,000 quei di Genova; ed infatti 129,000 e 86,000 fanno 215,000 si come portava la questione.

Applichiamo i principj esposti con farci a risolvere un qualche problema.

§. 39. Prob. 1.° « Due corrieri partono a uno stessissimo tempo, l' uno da Como per Bellinzona, l' altro da Bellinzona per a Como. Il primo fa 7 miglia l'ora, il secondo ne compie solo che 5. Dato che la distanza tra Bellinzona e Como sia di 36 miglia si cerca dopo quanto tempo e in qual punto i detti corrieri verranno ad incontrarsi «.

Facciam caso che tal incontro abbia luogo dopo scorso un numero x di ore. Poichè il primo percorre 7 miglia l' ora, in x ore avrà corso un numero di miglia espresso da $7x$; ed il secondo che a ciascun' ora fa miglia 5, avrà nelle x ore fatto un numero $5x$ di miglia.

Ora nel punto che succede l' incontro i corrieri hanno percorsa tutta quant' è la distanza fra le due città; perciò i due viaggi $7x$ del primo e $5x$ del secondo debbono formare 36 miglia; onde se n' ha l' equazione $7x+5x=36$, ossia $12x=36$, e quindi (§. 37.) $x=\frac{36}{12}=3$. Perciò i corrieri s' incontreranno dopo 3 ore di cammino. E nel vero il primo in 3 ore fa 21 miglia, il secondo ne corre 15; dunque tutti e due insieme fecero l' intero tratto di strada e però si sono incontrati.

Prob. 2.° « A fine d'aguzzare l'industria d'un operajo, gli si promettono 5 franchi per cadun giorno che compierà di lavoro, sotto condizione che ei n' abbia a perdere 3 ogni giorno da lui trascorso oziosamente. Passati 36 giorni l' operajo va debitore di 4 franchi. Ora è da vedere quanti giorni abbia fatto di lavoro, e quanti gliene passarono perduti «.

Sia x il numero dei giorni che egli impiegò nel lavorare, e $36-x$ esprimerà quelli consumati in ozio. Poichè in ciascun de' primi ritrae 5 franchi di guadagno tutti insieme gli avranno fruttato $5x$, e siccome per caduno dei secondi ne perde 3, in tutti n' avrà perduto 3 volte $36-x$, ossia $108-3x$. Ma la perdita eccede il guadagno di 4 franchi, dunque $108-3x-5x=4$. In questa equazione trasportando l'incognita nel secondo membro, e le quantità note nel primo se ne ricaverà $108-4=3x+5x$, ossia $104=8x$, e quindi ancora $8x=104$, e però $x=\frac{104}{8}=13$.

Dunque 13 sono stati i giorni che l'operajo diede al lavoro e conseguentemente 23 saranno i giorni, che egli trascorse oziosamente. In fatti nei primi gliene risultò di guadagno 65 franchi e negli altri fece perdita di 69; or dunque gli corre debito di 4 franchi, come veniva richiesto per la questione.

§. 40. Sin qui abbiamo operato la risoluzione di problemi, in cui non facea mestieri valersi altro che d'una incognita, ma sovente se n'incontrano di tali per cui risolvere torna assai comodo e talvolta è di necessità l'usare più incognite. Perchè in essi più presto si ritrovi il valore delle quantità incognite convien prima farle scomparire, o come si dice *eliminarle* ad una ad una, sinchè si giunga ad un'equazione la quale non ne contenga che una sola, e che perciò sia fattibile scioglierla coi metodi spiegati. Trovato che si abbia il valore di tal incognita non riuscirà malagevole il far anche ritrovamento dei valori di tutte le altre.

§. 41. Acciò che si comprenda il come possano eliminarsi le incognite, poniamo sia da risolvere il seguente problema.

Prob. «Braccia 2 di panno e 3 di seta costarono 78 lire; più ancora 3 braccia di panno e 5 di seta si pagarono lire 126. Ora si vuol cercare a quanto monta il prezzo del panno e della seta «.

Sia x il numero che esprime in lire il costo del panno; ed y dinoti il prezzo della seta. Ciò fatto, si discorra in questa forma: se braccia 2 di panno e 3 di seta importano lire 78 sarà

$$2x+3y=78:$$

e, posciachè 3 braccia del primo, e 5 dell'altra costano 126 se n'avrà

$$3x+5y=126.$$

Ecco le due equazioni che rappresentano le condizioni del problema. Per trovare mercè di esse i valori delle incognite x e y è da farsi ad eliminare una di queste, p. es. la x. A tale scopo si vogliono agguagliare gli ineguali coefficienti di x in ambe le equazioni. Ciò si fa moltiplicando la prima per 3 coefficiente che l'x ha nella seconda equazione, e questa per 2, coefficiente di x nella prima. Le equazioni stesse diverranno

$$6x+9y=234;$$
$$6x+10x=252;$$

Sottratta che s'abbia la prima di quest'ultime dalla seconda, membro per membro, ne risulterà $6x+10y-6x-9y=252-234$, ossia, fatta la riduzione, $y=18$. Onde la seta vale 18 lire cadun braccio. Determinato il valore di y si può in pari modo ricavarne il prezzo di x eliminando la y dalle due equazioni primitive. Il che si trae ad effetto con rendere uguali i coefficienti di y e poscia sottrarne le equazioni che indi si hanno. Ma del consueto si tiene altra via ben più corta e spedita. Come si discoverse un' incognita si toglie questa da una delle precedenti equazioni e vi si pone in vece il suo proprio valore. Tanto è bastevole a far che agevolmente si conoscano i valori dell'altre tutte incognite.

E così nell' equazione $2x+3y=78$ sostituito il 18 a luogo dell'y si avrà $2x+54=78$ e quindi $2x=78-34=24$, ed $x=12$. Perciò il panno venne pagato 12 lire per ogni braccio. Tutti e due i valori ottenuti soddisfano, come è facile il vedere, alle condizioni del problema. E per vero $2x+3y=24+54=78$, e $3x+5y=36+90=126$, secondo che veniva richiesto dalla questione.

§. 42. A questo punto sarà giovevole il considerare che, quando le quantità date vengono espresse in numeri, le soluzioni sono speciali: ond' è che bisogna rinnovarle al menomo cambiamento che sopra quelle si faccia. E quindi torna meglio risolvere i problemi per maniera del tutto generale, adoprando le lettere a, b, c, ecc. invece dei numeri.

Per fare poi la soluzione dei casi particolari non si ha che a sostituire ad esse lettere i

numeri che loro corrispondono. Vaglia di norma il seguente problema.

§. 43. Abbiasi a ricercare due quantità di cui la somma $=a$ e la differenza $=b$.

Si rappresenti per x la quantità maggiore ed y sia la minore, e se n' avranno le due equazioni

$$x+y=a\,,$$
$$x-y=b.$$

Preso in tutte e due il valore di x se ne ricaverà

$$x=a-y\,,$$
$$x=b+y.$$

E, poichè $x=x$, sarà pure $a-y=b+y$, onde $2y=a-b$, ed $y=\frac{a-b}{2}$: ma era $x=a-y$; dunque posto in cambio di y il suo valore pur ora trovato ne risulta $x=a-(\frac{a-b}{2})=\frac{a+b}{2}$.

E si vede che i detti valori ben corrispondono alle condizioni del problema.

Infatti $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=a$; $\frac{a+b}{2}-(\frac{a-b}{2})=b$.

Dal risguardare i valori di x, y se ne ricava una regola generale ed è; *dato che si abbia la somma e la differenza di due quantità, la maggiore eguaglia sempre la metà di essa somma più la metà della differenza; e la minore eguaglia la metà della somma, meno la metà della differenza.*

Facciamone l'applicazione. « Due massi di pietra sono in peso 2434 libbre, e l'uno è 126 libbre meno che l'altro; quant' è il peso di ciascuno? «

Nell' equazione precedente posti invece d' a e b i loro proprj valori ne verrà $a=2434$, $b=126$; dunque $x=1280$, $y=1154$.

Mediante l'accennata regola si può sciogliere ogni qualunque problema, nel quale sia data la somma e la differenza delle quantità ricercate.

Rinnoviamo per forma generale il problema portato al §. 39.

« Due corrieri partono in uno stesso tempo e l' uno va incontro all' altro. Le rispettive celerità sono m, n, ed a si è la distanza dei luoghi di partenza: si cerca quando essi verranno ad incontrarsi «.

Nel punto d' incontro il corriere della celerità m abbia corso lo spazio x; e l'altro avrà fatto il resto della distanza cioè $a-x$. Questi spazj descritti in tempi uguali debbono, come è chiaro, essere in proporzione colle velocità rispettive. Il perchè si avrà $x : a-x :: m : n$, ossia fatti i prodotti degli estremi e dei medj (vedi in Arit.) $nx=am-mx$, oppure $nx+mx=am$, o finalmente $(n+m)\ x=am$, e di qui $x=\frac{am}{n+m}$: valore espresso in generale, e che ben si adatta per ogni simil caso particolare.

Se p. es. i luoghi sieno alla distanza di 36 miglia e la velocità dei corrieri sieno 7 e 5, n' avremo $a=36$, $m=7$, $n=5$ perciò $x=\frac{36\times7}{5+7}=21$, e si farà l' incontro quando il corriere della velocità 7 avrà percorso 21 miglia.

Posto che la distanza fosse di 90 leghe, e le velocità sieno 2 e 2 $\frac{1}{2}$, sarà $a=90$, $m=2$, $n=2\frac{1}{2}$,

$$\text{onde } x=\frac{90\times2}{2\frac{1}{2}+2}=\frac{180}{4\frac{2}{1}}=40,$$

e l' incontro succederà allorchè il corriere dalla velocità 2 avrà corse 40 leghe.

§. 44. La maniera praticata nell' eseguire la risoluzione dei problemi posti nei paragrafi antecedenti, ne ha mostrato come date due equazioni a due incognite si debba operare per discoprire il valore di queste.

Non diverso è il metodo, che si vuol tenere affine di risolvere un qualunque altro problema purchè di primo grado e *determinato*, qualora cioè somministri tante equazioni quante sono le incognite.

Prob. È dato un numero composto di tre cifre tali che la loro somma è 14, la somma delle estreme divisa per la media è 6, e sottraendo da esso il 594 si hanno le medesime cifre, ma in ordine inverso. Si cerca un tal numero.

Posto x, y, z siano le sue tre cifre, per le prime due condizioni si avrà $x+y+z=14$, e $\frac{x+z}{y}=6$. L'ultima di esse condizioni (se riguardisi che un numero avente x centinaja, y decine e z unità può significarsi per $100x+10y+z$) verrà espressa per l'equazione $100x+10y+z-594=100z+10y+x$. Questa con trasportare $100z+10y+x$ nel primo dei membri si trasforma in $100x+10y+z-100z-10y-z=594$, e di qui, fatta la debita riduzione, se n'ha $99x-99z=594$; la quale divisa per 99 vien ad essere $x-z=6$. Trovate così le tre equazioni, si riduce la seconda di esse ad $x+z=6y$ e sottraendola dalla prima $x+y+z=14$, se ne ricava $y=14-6y$, ossia $7y=14$; onde $y=2$. Posto questo valore nell'equazione $x+z=6y$ si avrà $x+z=12$. Sì fatta equazione sommata con la terza $x-z=6$ produce $2x=18$, od $x=9$; laddove sottratta da essa dà per residuo $2z=6$ ossia $z=3$.

Adunque le tre cifre sono 9, 2, 3, e il numero ricercato si è 923. Ed in effetto: $x+y+z=+9+2+3=14$, ed $\frac{x+z}{y}=\frac{9+3}{2}=6$. Se poi dal 923 sottraggasi il 594 se ne ricaverà 329 le cui cifre sono le stesse che quelle del 923, ma però ordinate al contrario. Ciò verifica pienamente le condizioni del problema.

Rappresentiamo siccome in un quadro tutte le operazioni praticate per la soluzione del problema in discorso.

I.	$x+y+z=14.$
II.	$\frac{x+z}{y}=6.$
	$100x+10y+z-594=100z+10y+x,$
	$100x+10y+z-100z-10y-x=594,$
	$99x-99y=594.$
III.	$x-z=6.$
IV.	$x+z=6y$ ...... (dalla II.)
I.—IV.	$y=14-6y,$
	$7y=14,$
	$y=2.$
V.	$x+z=12$ ..... (dalla IV.)
V.+III.	$2x=18,$
	$x=9.$
V.—III.	$2z=6$
	$z=3.$

§. 45. A questo luogo metterà bene il recare alcune osservazioni.

I. Dato che le incognite fossero in numero maggiore delle equazioni, l'ultima di queste che si ha dopo fatta la debita eliminazione, conterrebbe più quantità ignote, il cui valore, a voler stare sul generale, non può essere fermamente stabilito perchè può variare senza fine. In tal caso il problema si avrebbe per *indeterminato* e così pure la equazione. Così $x+y=12$ è una equazione indeterminata; giacchè facciasi $x=1$ e $y=11$, o $x=2$ e $y=10$: e così via via, se ne avrà sempre $x+y=12$ sicchè infiniti sono i valori che posti invece di x e y equivalgono al numero dato.

II. Vaglia più oltre il notare che è si bene tutta una cosa il sottrarre la prima equazione della seconda, o per converso, ma che, sottratta p. es. che s' abbia la prima dalla seconda e questa dalla terza riesce inutile il sottrarre la prima dalla terza, giacchè la nuova equazione che ne risulta non è in realtà diversa dalle due precedenti.

III. Accade non di rado, che le equazioni non si vogliano altrimenti sottrarre sì bene sommare, e ciò interviene qualora le incognite che si devono eliminare hanno nelle due equazioni i loro coefficienti con segni contrari.

IV. Si avverta pure, che l' operazione a fin di ridurre ad uguaglianza i coefficienti dell' incognita da eliminarsi è del tutto analoga a quella, che si fa in Aritmetica per la riduzione dei rotti allo stesso denominatore.

Ciò sia chiaro per un esempio. Abbiansi le tre equazioni.

$$2x+2y+3z=15$$
$$3x+4y+6z=29$$
$$5x+7y+5z=34.$$

Per agguagliare in tutte e tre i coefficienti di x, si moltiplichi la prima per 15, prodotto di 3 per 5 cioè dei coefficienti, che l' incognita ha nell' altre due equazioni; poscia si faccia la moltiplicazione della seconda per 10, prodotto di 2 per 5; ed in fine la terza venga moltiplicata per 6, prodotto di 2 per 3. Fatta una tale operazione ne vengon fuori tre nuove equazioni in che i coefficienti di x sono tutti eguali. Non diversa è la regola la quale si pratica per fare che un medesimo sia il denominatore di più frazioni.

V. Ultimamente è da sapere, che talvolta può aversi il valore di qualcuna delle incognite in sul principio dell' operazione, e che quindi ben di spesso l' assegnato metodo può farsi molto più semplice e spedito.

Per operare la risoluzione dei problemi di grado più elevato convien farsi più addentro nella dottrina dell'Algebra e quindi non sarà indarno tener prima discorso delle potenze e radici.

CAPO QUARTO.

Delle potenze e delle radici.

§. 46. I prodotti che riescono dal moltiplicare continuatamente una quantità per se stessa sono le così dette *potenze* di essa quantità. Ogni quantità è essa stessa prima sua potenza.

Se una quantità a si moltiplichi sola una volta per se stessa, il prodotto a^2 si chiama seconda *potenza* di a, ove la si moltiplichi due volte il prodotto a^3 è la *terza potenza* di a; se tre volte, il prodotto a^4 ne è la *quarta potenza*, e così via via. Perciò la seconda potenza di $5c^3$ è $5c^3 \times 5c^3$, ossia $25c^6$, la terza $5c^3 \times 5c^3 \times 5c^3$, cioè $125c^9$, la quarta $625c^{12}$ ecc.

§. 47. Nei casi suddetti le quantità a e $4c^3$ dalle quali si formano le diverse potenze a^2, a^3, $125c^2$, $625c^{12}$, ecc. han sortito il nome di *radici*; e vengono poi denominate radici *seconde*, *terze* ecc. secondo che si riferiscono alla 2ª potenza, alla 3ª e va dicendo.

Quindi a è radice seconda di a^2, $5c^3$ è radice quarta di $625c^{12}$ ecc.

§. 48. La seconda potenza dicesi ancora *quadrato* e la terza *cubo*, onde a^2 è il quadrato di a, e a^3 ne è il cubo. E così anche le radici seconde e terze diconsi *quadrate* e *cubiche*.

§. 49. Qualora si abbia a dinotare, che una quantità vuol essere alzata ad una qualche potenza, è da riporla tra parentesi, e scrivere fuori di questa in alto a destra il numero della potenza che si cerca. Di qui è che le espressioni $(3a^2m)^3$ $(a+b)^4$ sono indizio che $3a^2m$ deve essere alzato al cubo, ed $a+b$ alla quarta potenza.

§. 50. Che se, invece di solo indicare la data potenza, vogliasi realmente formare, dovrà moltiplicarsi la quantità per se stessa

tante volte, meno una, quante sono le unità nel numero della potenza. Quindi per alzare $7a^3b$ al quadrato converrà moltiplicare $7a^3b$ per $7a^3b$, e scrivere $49a^6b^2$. Per innalzare al cubo $-2ab^3$ si moltiplicherà $-2ab^3$ per $-2ab^3$, e il prodotto $4a^2b^6$ vuol essere ancora moltiplicato per $-2ab^3$, e si avrà il cubo $-8a^3b^9$. Questi esempi dan chiaro a conoscere, che a fin di formare una qualunque potenza di un monomio fa solo mestieri elevare prima ad una tale potenza il suo coefficiente preso insieme col segno, che il precede, e dipoi moltiplicare gli esponenti pel numero della potenza a cui si vuole innalzato esso binomio. Perciò il cubo di $4xy^2$ si è $64x^3y^6$ ecc.

Questa regola non ha luogo rispetto ai polinomi.

§. 51. Fingiamo ora si debba formare il quadrato di $a+b$. A tal fine si moltiplichi $a+b$ e ne risulterà $a^2+2ab+b^2$ seconda potenza di $a+b$. Di qui si può ricavare, che il quadrato d' un binomio non pure contiene i quadrati di tutti e due i suoi termini, ma più oltre il doppio prodotto dei termini stessi. Però il quadrato di un altro binomio x^2-2xy sarà $x^4-4x^3y+4x^2y^2$.

Posto che si cercasse il quadrato d' un trinomio p. es. $a+b+c$ non si deve far più che moltiplicarlo per se medesimo, e così via discorrendo d' ogni qualunque quantità polinomia.

§. 52. Se poi il binomio $a+b$ si avesse ad elevare al cubo converrebbe moltiplicare $a+b$ per $a+b$; e così di pari il prodotto $a^2+2ab+b^2$ per $a+b$. Il risultato $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ è il cubo che si ricercava. Da questo appare che il cubo d'un binomio comprende i cubi del primo e del secondo termine, e così ancora il triplo quadrato del primo termine moltiplicato pel secondo, non che il triplo quadrato del secondo moltiplicato pel primo termine.

A uno stesso modo riesce facile l'ottenere le potenze di grado via via maggiore.

§. 53. Qui è bene l'osservare, che il quadrato, la quarta potenza e in genere le potenze ad esponenti pari sono mai sempre positive. E nel fatto sianvi le quantità $+a$, e $-a$; il loro quadrato sarà pur tuttavìa $+a^2$, giacchè tanto $+a\times+a$, quanto $-a\times-a$ danno $+a^2$. La loro quarta potenza che è $+a\times+a\times+a\times+a$, e $-a\times-a\times-a\times-a$ sarà per entrambe $+a^4$. Parimente i quadrati di $+a+b$, e di $-a-b$ sono $a^2+2ab+b^2$, cioè a dire sempre positivi contuttochè nell'uno dei due casi la radice sia negativa.

Rispetto poi alle potenze tutte, le quali hanno dispari gli esponenti, è da sapere che esse sono positive o negative giusta le quantità onde vengono generate.

§. 54. Veniamo ora all'estrazione delle radici. E primieramente, se occorre di esprimere, che da una quantità si deve estrarre qualcuna radice si fa precedere alla quantità stessa il segno $\sqrt{}$, che dicesi *radicale*, e sovresso si scrive il numero da cui viene indicato il *grado* della radice di che vuol farsi la estrazione. Onde per significare la radice terza di a si nota $\sqrt[3]{a}$; per accennare la radice quarta di ab^3 si vuole scrivere $\sqrt[4]{ab^3}$ ecc. A ragione di brevità nella radice seconda non vi si pone il 2, quindi invece di $\sqrt[2]{a}$ si scrive $\sqrt{a}$, e si legge *radice* di a, lasciando l'aggiunta *seconda* o *quadrata*, perchè vi è sottinteso. Avendosi a dinotare l'estrazione della radice di un polinomio p. es. $a^2+b^2+c^2$ si pratica assai aconciamente di metterlo fra parentesi, ovvero coprirlo con esso una linea in questa forma $\sqrt{}\,(a^2+b^2+c^2)$, oppure $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

§. 55. Posto che l'estrazione vogliasi in effetto è da operare dirittamente l'opposto di quanto venne praticato rispetto all'innalzamento d'una potenza. Quindi se è discorso d'un monomio fa d'uopo ricavare la radice del suo coefficiente numerico, e dividerne gli esponenti pel grado della radice che si vuol estrarre. Il perchè la radice quadrata di $4a^2$ sarà $2a$, e la cubica di $a^3c^6m^{12}$ sarà ac^2m^3 ecc. A ben eseguire così fatta operazione è mestieri conoscere il come una qualunque radice si estragga da un coefficiente numerico. Ciò non importa gran difficoltà se i numeri sien piccoli e da radice esatta. Pei numeri alti e per le radici approssimate vedremo più avanti qual modo abbiasi a tenere.

§. 56. La radice di $4a^2$ si è veduto essere $2a$; ma è pur anche $-2a$ (§. 53.) Affine d' indicare questo doppio valore l' uso porta di scrivere $\sqrt{4a^2} = \pm 2a$, oppure si pone avanti al radicale il segno $\pm$, che si pronunzia *più* o *meno*, onde s' avverta che la radice puossi prendere egualmente in senso positivo e negativo.

Questa dubbiezza però non ha luogo salvo che nelle radici pari, poichè in quelle di grado impari la potenza col segno $+$ dà la radice positiva, e la potenza col segno $-$ dà negativa ancor la radice.

§. 57. Facciam supposto si debba estrarre la radice quadrata da $-4a^2$, che mai verrebbe scritto a radice? Non $+2a$, nè $-2a$; perchè dall' una e dall' altra di siffatte quantità moltiplicata per se stessa si genera di pari $+4a^2$, e non $-4a^2$. S' intende perciò che la radice di $-4a^2$ non esiste perchè non vi sono quadrati negativi (§. 53.) Tali radici, che non di rado s' incontrano nel fare de' calcoli, vengono giustamente nominate quantità *immaginarie*, per opposto a tutte le altre che son dette *reali*, perchè hanno un valore effettivo. Per simil fatta sono immaginarie le radici seconda, quarta, sesta di -1, di $-a4$, ecc., ed in generale tutte le radici pari delle quantità negative.

§. 58. Abbiasi ora la quantità a da cui debbasi trar fuori la radice quadrata. Conforme alla regola prescritta (§. 55.) si avrebbe a dividere per 2 l' esponente 1 della lettera a; ma posciachè la divisione non può effettuarsi, sarà bastevole pur indicarla e scrivere $a^{\frac{1}{2}}$. In fatti, stando alla regola degli esponenti, la quantità $a^{\frac{1}{2}}$ innalzata al quadrato, il che val quanto moltiplicata per se medesima, dà $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}$, ossia $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$, e quindi riproduce a. Similmente la radice terza di m^2n^3 si è $m^{\frac{2}{3}}n$, la quarta di m^2n^4 è $m^{\frac{1}{2}}n$; per conseguenza una quantità che porti una frazione ad esponente equivale a una sua radice, il cui grado è segnato dal denominatore dell' esponente. Le radici che non si possono avere esatte e che perciò convien dinotarle con esponente frazionario o col segno radicale diconsi quantità *incommensurabili* od *irrazionali*; e per contrario son dette *commensurabili o razionali* le altre tutte che non han segni radicali, sì hanno interi gli esponenti.

§. 59. Finalmente sia cercata la radice d'una quantità polinomia, e sia ad esempio quella del trimonio $x^2 - 4xy + 4y^2$. La radice di che si richiede avrà due termini, (§. 51.), e nel trinomio presente, supposto che sia un quadrato perfetto devono essere compresi i quadrati dei due termini della radice ed il loro doppio prodotto. Or bene, qualora la quantità data non racchiudesse due quadrati riuscirebbe impossibile l'estrarne la radice; ma poichè vi si trovano, vediamo il modo di farne la estrazione.

$$\begin{array}{c|c}
x^2-4xy+4y^2 & \underline{x-2y} \\
-x^2 & 2x-2y \\
\overline{} & -2y \\
0\ -4xy+4y^2 & \\
-4xy+4y^2 & \\
+\quad - & \\
\hline
0\quad 0 &
\end{array}$$

In prima è da ordinare il trinomio per una lettera, e sia per x. Di poi si estragga la radice del primo quadrato x^2 e notisi al quoziente l' x, che ne risulta. Il quadrato di x che è x^2 si vuol sottrarre dal trinomio, e ciò fatto, se ne avrà a residuo $-4xy+4y^2$. Il termine $-4xy$ che rappresenta il doppio prodotto si divida per $2x$, doppio della radice trovata, e ne verrà il quoto $-2y$, che dovrebb' essere il secondo termine della radice. A fine di accertarsene si moltiplichi $2x$ per $-2y$, e si formi il quadrato di $-2y$. L'uno e l'altro prodotto si ricavano scrivendo $-2y$ presso e sotto al $2x$, e poscia operando la moltiplicazione di $2x-2y$ per $-2y$.

Da ultimo il prodotto $-4xy+4y^2$, sottraggasi dal residuo $-4xy+4y^2$. E perocchè nulla avanza, è da conchiudere che il trinomio dato contiene il quadrato di x, più oltre quello di $-2y$ e il doppio prodotto di x per $-2y$. Dunque esso è quadrato perfetto e la sua radice è $x-2y$.

§. 60. Ove nel caso presente si fosse ordinato per y, od in vece di notare x a radice di x^2 si fosse preso $-x$ sarebbe venuta in radice la quantità $2y-x$. Per verità è già noto pel §. 53. che tanto $x-2y$ quanto $-(x-2y)$ ossia $2y-x$ danno il medesimo quadrato.

Ben appreso un così fatto metodo, non scontrasi veruna arduità in farne applicazione quolora si tratti di estrarre le radici da una quantità composta d' un molto maggior numero di termini che non è quella, su cui si è operato.

Ora è a vedere come dai numeri si possa ricavare la radice quadrata.

Lasciamo di toccare le regole per l' estrazione delle radici cubiche perchè assai difficili a ben comprendersi, e d' altra parte radissime volte incontra d' averle a praticare. Tanto più che a volerne trattare per opera ne obbligherebbe a troppo più di lunghezza che non ci siamo prefissi.

CAPO QUINTO.

Estrazione della radice quadrata dei numeri.

§. 61. Perchè bene s'intenda il come da un numero si cavi fuori la radice quadrata, giova por mente alla formazione del quadrato. Scelto un qualunque numero p. es. 34, si decomponga nei due 30+4 in modo che esso rappresenti un binomio, il cui primo termine esprima decine e il secondo unità. Il quadrato di un tal binomio conterrà come quello di $a+b$ (§. 51.) il quadrato delle decine, 900, più il doppio prodotto delle 3 decine per le 4 unità, 240, e più oltre il quadrato delle 4 unità, 16. Esso adunque sarà $900+240+16=1156$.

E per contrario, posto si voglia estrarre la radice da 1156, è da avere in mente che in questo numero si ha da trovare il *quadrato delle decine della radice, e il doppio prodotto di esse per l'unità, non che il quadrato delle unità.*

Ora, siccome decine moltiplicate per decine dan centinaia, il quadrato delle decine non può essere altrove che nelle centinaia, e perciò non convien cercarlo nelle decine nè tampoco nelle unità. E poichè decine moltiplicate per unità producono almeno decine, il doppio prodotto delle decine per le unità non può trovarsi fuorchè nelle decine. Perciò il numero da cui si vuole estrarre la radice si divide

in membri da due cifre cominciando alla destra; sicchè se le cifre non sono pari in numero l'ultimo membro a sinistra non ha che sola una cifra.

§. 62. Vediamo ora come si debba operare per l'estrazione della radice.

Si cerca la radice quadrata di 1156.

11,56	34
9	64
——	4
25,6	
256	
——	
0	

Poichè il numero 1156, contiene più di due cifre la sua radice ne avrà più di una e però essa conterrà decine ed unità. Il quadrato delle decine non è che il prodotto di decine per decine nè quindi può dare altro che centinaia. Per tanto, separate le due cifre a destra, si proceda a ricercare la radice di 9, massimo quadrato compreso nel 11. Essa è 3. Dopo averla scritta nel luogo assegnato alla radice se ne sottragga il quadrato 9 da 11, indi, avuto il residuo 2, appresso si abbassino le cifre 56. Ciò fatto se n'avrà 256 in cui deve esser compreso il doppio prodotto delle 3 decine per le unità, più oltre il quadrato di esse unità. E perchè il doppio prodotto non può essere se non che nelle 25 decine, se ne separi con una virgola l' ultima cifra 6. Diviso 25 per 6, doppio della radice, se n'ha per quoziente 4 che si vuol porre in radice e scrivere appresso e sotto il numero 6. Si moltiplichi poscia 64 per 4, ed è chiaro che per tale moltiplicazione si fa d' un tratto il quadrato dell' unità e il doppio prodotto delle decine per le unità. Il prodotto 256 sottratto da 256 non lascia residuo di sorta alcuna. Dunque è a dire che 4 si è la cifra delle unità da porsi alla radice, la quale perciò è 34. E si vede di fatto che $34 \times 34 = 1156$.

§. 63. Alcuna volta può intervenire che dividendo il residuo pel doppio della radice se n' abbia un quoto maggior del vero, e si riconosce per tale, giacchè, a moltiplicarlo secondo la regola, dà un prodotto maggiore che non è il residuo. In tal caso prima di porre il quoziente alla radice fa mestieri scemarlo d' una o più unità, finchè il residuo non venga superato dal prodotto.

Debba estrarsi la radice da 289.

In prima è da far considerazione che un tal numero avendo più che due cifre ha pur anche da avere la radice delle sue decine; e questa non può trovarsi nelle due cifre a destra (§. ant.). Perciò ne le separo per una virgola e di poi mi faccio ad estrarre la radice prossima del 2. Noto 1 alla radice, e ne sottraggo il suo quadrato dal 2, e presso al residuo 1 pongo giù le cifre 89 e lascio a parte il 9 in cui non può essere contenuto il doppio prodotto delle decine per le unità.

Quindi passo a dividere 18 per 2, doppio della radice avuta, e me ne viene in quoziente il 9, ma perchè 29×9 dà 261 prodotto che è più assai del 189, perciò il quoto 9 è maggiore del vero. Parimente osservo esser troppo grande il quoziente 8; e alla fine, preso 7, siccome 27×7 dà appunto 189 e sottratto questo prodotto nulla rimane, conchiudo che il 7 è quoziente giusto, e perciò lo scrivo alla radice. La radice esatta è 17.

§. 64. Fin qui si è parlato di radici da sole due cifre. Ma bene spesso le radici richieste comprendono centinaia, migliaia, ecc., e in tali casi l' operazione si maneggia con pari agevolezza.

Sia cercata la radice di 467,856.

Qualunque essa sia, la si può riguardare siccome composta di decine e d' unità, essendochè ogni numero può scomporsi in decine e unità. Così p. es. 734 si risolve in 73 decine e 4 unità.

Ora sopra è notato che il quadrato delle decine non può trovarsi salvo che nelle centinaia, e via progredendo innanzi. Dunque nel caso presente è da porre in disparte le due cifre 56 e farsi a cercare la radice di 4678. Essa parimenti sarà composta di decine e di unità, e poichè il quadrato di tali decine non può trovarsi nelle ultime due cifre a destra, quindi si vogliono separare dalle altre. Se quello che rimane contenesse più di due cifre si avrebbe continuatamente a separarne altre due finchè ne venisse un numero che non ne avesse fuor che due o anche una sola.

§. 65. Posto ciò, ecco per qual modo si deve eseguire l' operazione.

46,78,56	684
36	128
	8
107,8	1364
1024	4
545,6	
5456	
0	

Si scriva 467,856, e distinte in esso le cifre a due a due cominciando per le unità, si estragga la radice dalle prime due a sinistra, o dalla prima se non ve n'avesse altro che una. La radice prossima intera di 46 è 6. Scritto il 6 è da passar tosto a sottrarre il suo quadrato da 46. Presso al residuo vengano abbassate le due prossime cifre 78. Distinta nel 1078 l'ultima cifra 8, si divida 107, per 12, doppio della radice 6. Pongasi il quoziente 8 presso e sotto il 12, poscia si moltiplichi 128 per 8 e il prodotto 1024 sia tolto dal 1078. Perchè la sottrazione può effettuarsi, il quoziente non è maggiore del vero, e deve perciò notarsi in radice alla destra del 6. Sottratto 1024 da 1078, di costa al residuo pongo giù le due ultime cifre 56, e separata l'ultima a destra divido 545 per 136, doppio della radice finora trovata 68. Il quoziente 4 scritto accanto e sottesso il 136, e moltiplicato per 1364 dà il prodotto 5456 che sottratto da 5456 non lascia nulla di resto. Dunque il 4 è l'ultima cifra della radice, la quale perciò è 684.

Per simil guisa si ritroverà che

$$\sqrt{3751969}=1937.$$

Nota. Se dopo abbassato alcun membro a destra del residuo il doppio della radice trovata non si contenesse nel numero dividendo, allora è da porre zero alla radice, e tratto giù l'altro membro che segue, si vuol continuare l'operazione in pari tenore. Così

$$\sqrt{4243600}=2060.$$

§. 66. I numeri dai quali si è ricavata la radice nei paragrafi precedenti erano quadrati perfetti e conseguentemente l' operazione riuscí compiuta senz' altro residuo. Ma le più volte, scelto a caso un qualche numero, ad es. 3457 la sua radice non può aversi esatta sicchè vi rimane alcun avanzo. Allora essa è *incommensurabile* (§. 58.) ed il residuo fa conoscere, che, oltre agli interi, essa contiene pure qualcuna frazione. Una tale radice può essere prossimamente determinata con cifre decimali.

A tal fine non sarà indarno osservare che moltiplicando per se stessa una quantità che abbia decimali il quadrato ha un numero di cifre decimali, del doppio maggiore che quelle della radice. Ciò fa che, ove da un quadrato avente cifre decimali si voglia cavarne la radice, sia mestieri separare in questa tante decimali quant' è la metà di quelle che sono comprese nel quadrato. Perciò è necessario che le cifre decimali della data quantità sieno pari in numero o si rendano tali con aggiugnervi degli zeri a destra.

Dichiariamo la cosa con un esempio. Vogliasi la radice prossima di 3457

34,57	58,79	
25	109	108
	9	8
95,7	981	
964		
	1168	
930,0	8	
8169	9344	
11310,0	1167	
105741	7	
7359	11749	
	9	

Innanzi tratto si estragga la radice prossima intera di 3457. Di poi al residuo 93 aggiungansi due zeri. Separata l'ultima cifra, e diviso 930 per 116 si scriva il vero quoziente 7 a canto e sotto il 116. Il prodotto di 1167 per 7 sottratto da 9300 dà 1131 per residuo. Aggiunti a questo due zeri, e lasciato l'ultimo a parte, si divida 11310 per 1174, doppio della radice avuta 58,7. Il quoziente 9 somministra una nuova cifra alla radice stessa la quale, senza per nulla badare al residuo, vien ad essere 58,79. Ove pur si volessero altre cifre decimali non si avrebbe che aggiungere a due, a due de' nuovi zeri ai residui e proseguire nel modo stesso l' operazione.

Qualora il numero di cui è proposto trovarsi la radice contenesse cifre decimali non gli si dovrebbero aggiugnere altri zeri se non quanti bastano perchè il quadrato contenga il doppio delle cifre che si vogliono alla radice. Poniamo per figura sia da estrarsi la radice quadrata da 27,5 a meno d'un millesimo, e a tal uopo non si avrà, che ad aggiungervi cinque zeri. La radice prossima di 27,500000, usando il metodo suaccennato si troverà essere 5,744.

§. 67. Di qui chiaro si vede come si possa operare l' estrazione della radice anche da un numero decimale p. es. da 0,0729. Estratta la radice da 729 se n' avrà 27; e poichè il quadrato avea quattro decimali, la radice ne dovrà aver due e sarà 0,27. In verità $0,27 \times 0,27$ riproducono 0,0729.

§. 68. Più oltre da ciò che sopra è detto riesce pur agevole il rilevare la maniera che si vuol tenere a fin di estrarre la radice da qualunque frazione volgare. Chè a tal uopo basterà pur il trasformare quest' ultima in rotto decimale.

Abbiasi la frazione $\frac{5}{7}$, da cui si cerca la prossima radice da non più che tre cifre decimali. A quest' effetto si aggiunga al 5 il doppio numero di decimali richieste nella radice. Il quoziente che ne viene dal dividere 5000000 per 7 è 0,714285, la cui radice prossima è 0,845.

Dato che i termini d' una frazione fossero perfetti quadrati se ne estragga la radice dal numeratore e così dal denominatore e si avrà la radice di essa frazione.

$$\text{Così } \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}, \ \sqrt{\frac{81}{1024}} = \frac{9}{32}$$

La radice d'un intero congiunto ad un rotto, e per maniera d'esempio di $12\frac{1}{4}$ può aversi scambiando l' intero in frazione. Ridotta la quantità a $\frac{49}{4}$ è da operare sovressa al modo che si è accennato. Se ne avrà la frazione $\frac{7}{2}$ ossia 3 interi e $\frac{1}{2}$, i quali di vero moltiplicati per se medesimi riproducono la quantità data $12\frac{1}{2}$.

Non ci allunghiamo più oltre sopra tal materia, dove più che la regola giova l' esercizio.

CAPO SESTO.

Delle equazioni di secondo grado.

§. 69. Le equazioni di secondo grado ad una sola incognita comprendono il quadrato e la prima potenza dell' incognita stessa, insieme a quantità conosciute. Quindi l'equazione per qualunque problema determinato del secondo grado avrà sempre la forma $x^2+px=q$. In essa equazione p e q rappresentano quantità positive o negative, intere o frazionarie secondo che è voluto dalla questione.

§. 70. Ove addivenisse, che tra i molti valori che aver possono le quantità p e q, la seconda q fosse $=0$, allora l' equazione $x^2+px=0$, comecchè si paia essere del secondo grado, per effetto s'appartiene al primo. Giacchè trasportando px si avrebbe $x^2=-px$, e dividendo l' un membro e l' altro per x, ne risulterebbe $x=-p$. Rechiamo una questione la quale ne conduca a questo caso.

§. 71. Problema: Qual numero è uguale a mezzo il prodotto delle sue metà ?

Sia x, le sue metà saranno $\frac{x}{2}, \frac{x}{2}$; e, a tenore delle condizioni del problema se ne avrà

$$x=\frac{1}{2}\times\frac{x}{2}\times\frac{x}{2}=\frac{x^2}{8},$$

$$\text{ossia } x^2 = 8x.$$

Divisi i due membri dell' equazione per x se ne ricava $x=8$. E di fatto l' 8 risponde assai bene alla domanda proposta.

§. 72. V' ha pure dei problemi, che ne guidano ad equazioni di secondo grado, ma tali che in esse la quantità p si è $=0$, e che però si riducono alla forma $x^2=q$. Le equazioni di questa specie chiamansi *pure*, e non riesce gran fatto malagevole il farne la risoluzione. E nel vero, se due quantità sono eguali, lo saranno pure le loro radici quadrate; or bene, poichè $x^2=q$, sarà $\sqrt{x^2}=\sqrt{q}$ ossia $x=\pm\sqrt{q}$ (§. 56). Laonde basta l'estrarre la radice da q, perchè tosto si conosca il valore di x o vogliasi positivo, oppure negativo.

Se la quantità q fosse negativa la sua radice sarebbe immaginaria (§. 57.) e darebbe a vedere non esservi alcun reale valore di x atto a risolvere la proposta equazione, e quindi essere assurdo il problema da cui questa venne dedotta.

Problema. » Vogliasi un numero tale che la sua terza parte moltiplicata pel quinto di esso numero sia eguale a 15 «.

Fingiamo sia $=x$, e sarà

$$\frac{x}{3}\times\frac{x}{5}=15,\ \text{cioè}\ \frac{x^2}{15}=15.$$

Ora per fin di togliere il denominatore 15, vuolsi moltiplicare l' un membro e l' altro per 15, e se n' avrà

$$x^2=225.$$

Ricavata che sia la radice ne risulterà

$$x=\pm\sqrt{225}=\pm 15.$$

E per verità il numero 15 di pari che -15 si presta assai bene a sciogliere il dato problema.

§. 73. Passiamo ora mai a vedere come si venga a stabilire il valore di x nelle equazioni della forma $x^2+px=q$, posto il caso che niuna delle cifre p e q sia $=0$. Le equazioni di tal genere han nome di *complete*. Chi ben consideri che il primo termine di esse è il quadrato di x, e che il secondo si può risguardare come il doppio prodotto di $\frac{p}{2}$ moltiplicato per x, rileverà che a fine il primo membro sia un perfetto quadrato non è mestieri fuorchè porre in esso il quadrato di $\frac{p}{2}$ (§. 51). Or dunque aggiungasi a tutti e due i membri dell' equazione il quadrato di $\frac{p}{2}$.

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=q+\frac{p^2}{4}$$

Ciò fatto, estraendo la radice dal primo membro divenuto un perfetto quadrato, e così parimente dal secondo, se ne otterrà

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{q+\frac{p^2}{4}},\ \text{e finalmente}$$

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{q+p\frac{p^2}{4}}$$

che è quanto si cercava.

Non sarà indarno il toccare le conseguenze che da una tal'espressione si derivano.

I. Perchè doppio si è il segno premesso al radicale, si vede chiaro che l'incognita ha due valori, e che per entrambi si può verificare l'equazione, comecchè talvolta un solo si adatti alle condizioni del problema.

II. Si rende ancora manifesto che, essendo $q=0$, deve risultare

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}};\ \text{e di quì}$$

$$x=-\frac{p}{2}+\frac{p}{2}=0,$$

$$x=-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}=-p.$$

Il secondo di questi due valori fu già trovato al §. 70., ed il primo che ivi si distrusse per la divisione di x mostra pure la verità dell' equazione $x^2+px=0$.

III. Più oltre è palese che, fatto il q negativo ed $=\frac{p^2}{4}$, la quantità $\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}$ diviene $=0$; onde x resterà $=-\frac{p}{2}\pm 0=-\frac{p}{2}$, e i suoi due valori saranno eguali. Posto il q sia negativo e maggiore di $\frac{p^2}{4}$, in tal caso $\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}$

è radice di una quantità negativa e quindi immaginaria, (§. 57.) e i valori di x che da questa ne vengono saran pure essi immaginarj. Il che mostra l'assurdità della questione.

§. 74. A più chiara intelligenza degli esposti principj facciamone l'applicazione con praticare lo scioglimento d'un qualche problema.

Prob. 1.° » Si domanda qual si è il numero che moltiplicato per 7 ed accresciuto del suo quadrato sia eguale a 144 «.

Sia x, e il suo quadrato sarà x^2, e la condizione del problema verrà espressa con l'equazione

$$x^2+7x=144.$$

Aggiunto che s'abbia ad amendue i membri il quadrato di mezzo il coefficiente $\frac{7}{2}$, se ne ricaverà

$$x^2+7x+\frac{49}{4}=144+\frac{49}{4}.$$

Estraendo la radice n'avremo

$$x+\frac{7}{2}=\pm\sqrt{144+\frac{49}{4}},\ \text{e quindi}$$

$$x=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{144+\frac{49}{4}}.$$

Ora le quantità poste sottesso il segno radicale ridotte che sieno a un medesimo denominatore, ne verrà

$$x=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{625}{4}};\ \text{ma}\ \sqrt{\frac{625}{4}}=\frac{25}{2};$$

dunque $x=-\frac{7}{2}\pm\frac{25}{2}$.

Ove si prenda il segno $+$ si ha

$$x=-\frac{7}{2}+\frac{25}{2}=9.$$

Se poi prendasi il segno $-$, se n'avrà

$$x=-\frac{7}{2}-\frac{25}{2}=-16.$$

E per verità, fatto $x=9$ sarà

$$9^2+7\times9=81+63=144.$$

Posto il valore di $x=-$, ne risulterà del pari

$$-16^2+7\times-16=256-112=144.$$

In cambio di fare l' operazione tutta per disteso era a sufficienza si fosse paragonata l' equazione

$$x^2+7x=44$$

con la formola generale (§. 73.) $x^2+px=q$, che avrebbe dato $p=7$, $q=144$; onde sostituiti sì fatti valori nella espressione

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{q+\frac{p^2}{4}},$$

ne sarebbe venuto $x=9$, e $x=-16$.

Prob. 2.° » Un semenzajo è formato da 20 file uguali di pianticelle tutte tra loro a pari distanza. Se togliendo via dall' un lato o dall' altro alcuna delle 20 file si levassero 96 piante esso acquisterebbe una forma quadrata. Si cerca il total numero delle sue piante «.

Poniamo ve ne siano x in ciascuna delle 20 file, e se ne conteranno in tutto $20x$. Se da $20x$ si levi 96 rimane un quadrato che ha un numero x di pianticelle per ciascun lato e che perciò ne contiene x^2. Quindi si ha

$$20x-96=x^2 \text{ e di qui}$$
$$x^2-20x=-96.$$

Fatto il confronto di quest' equazione coll' altra $x^2+px=q$, si vedrà che nel presente caso è $p=-20$, $q=-96$, e quindi si ricava $x^2-20+\frac{400}{4}=-96+\frac{400}{4}$, ed estratta la radice da tutti e due i membri se n' avrà

$$x=\frac{20}{2}\pm\sqrt{\left(-96+\frac{400}{4}\right)},\ \text{e}$$
$$x=10\pm\sqrt{(-96+100)}$$
$$x=10\pm\sqrt{4}.$$
$$x=10+2=12.$$
$$x=10-2=8.$$

Onde vi sono 12 ovvero 8 piante per fila; perciò il semenzajo ne conterrà 240, oppure 160. Questi numeri soddisfanno entrambi alle condizioni del problema, nè è punto determinato quale dei due sia da preferirsi.

§. 75. Per le cose dette si conosce che una stessa equazione scioglie non pure il problema, la cui risoluzione specialmente si vuole, ma ben anche si presta a risolvere tutti i problemi che hanno somiglianti condizioni. Così nel proporre il problema antecedente si avea solo in mente di ritrovare un numero positivo che verificasse le condizioni richieste; e l'equazione venuta dimostra, che a tal uopo s'adatta parimente un numero negativo. Il medesimo dicasi degli altri problemi, di che sopra abbiamo operata la risoluzione.

È questo un singolare e considerabile vantaggio che altronde non si può avere, fuorchè dall'Algebra.

§. 76. Prob. » Si vuol dividere il 10 in due parti tali che il loro prodotto sia 100 «.

Facciamo $a=10$; $b=100$; x sia una delle parti cercate, e l'altra sarà $a-x$, e il loro prodotto $(a-x)\,x=b$. Da che ne viene l'equazione $ax-x^2=b$. Cambiando i segni a tutti i termini per rendere positivo il quadrato $-x^2$, si avrà $x^2-ax=-b$. Posta una tale equazione in confronto colla formola generale, dà $p=-a$, $q=-b$; perciò, fatta la debita sostituzione, ne verrà

$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(-b+\frac{a^2}{4}\right)}=5\pm\sqrt{\left(-100+\frac{100}{4}\right)}$$
$$=5\pm\sqrt{-75}.$$

Ora la radice d' una quantità negativa è immaginaria (§. 57.), ed impossibile ad aversi, dunque è impossibil cosa dividere il 10 in due parti che moltiplicate l' una per l' altra facciano 100. Ed ecco per qual maniera l'Algebra risolve tutte le questioni; ne dà la soluzione se vi è; e non essendovi, ne rende manifesta la sua impossibilità.

CAPO SETTIMO.

Delle ragioni e proporzioni aritmetiche e geometriche.

§. 77. Le parole *ragione* e *rapporto*, presso i matematici, hanno una medesima significazione e sì l' una che l' altra esprime il *risultato del paragone di due quantità.*

Se due quantità si pongono al confronto per vedere di quanto l' una superi l' altra o ne venga superata il risultato che quindi se n' ha si chiama *ragione aritmetica.*

Posto che il paragone tra due quantità si faccia per fin di conoscere quante volte l'una contenga l'altra o ne sia contenuta, ciò che nasce da un siffatto confronto è la così detta *ragione geometrica.*

Ben chiaro si vede che la ragione aritmetica si è la differenza, la quale passa tra le quantità paragonate, e si ricava mercè la sottrazione; e così del pari è manifesto che il quoziente delle quantità stesse ne è la ragione geometrica e si ha mediante la divisione.

Perciò la ragione aritmetica di 24 a 8 è 16, e la geometrica è 3. La prima vien indicata con un sol punto, ovvero col segno di sottrazione posto di mezzo alle quantità di cui si fa il confronto; la seconda poi si dinota mettendo tra esse quantità due punti, ovvero scrivendo l' una sotto all' altra con l' interposizione d' una lineetta.

Per tal modo le espressioni

$$15 \,.\, 8 = 7$$

(15 a 8 *eguale* 7),

$$\text{e } 15 - 8 = 7$$

(15 *meno* 8 *eguale a* 7)

significano ambedue la ragione aritmetica tra 15 e 8.

In generale $a \,.\, b$, ovvero $a - b$ significa la ragione aritmetica tra le quantità a e b.

Parimente

$$12 : 4 = 3$$

(12 *a* 4 *eguale a* 3),

$$\text{oppure } \frac{12}{4} = 3$$

(12 *diviso* 4 *eguale* a 3)

dinotano tutte e due la ragione geometrica di 12 a 4.

E così $a : b$, od ancora $\frac{a}{b}$ vale a significare generalmente la ragione geometrica di a e b.

In tutte due ragioni le quantità poste al confronto ne sono i *termini*; ed il primo dicesi *antecedente*, il secondo *conseguente*.

La differenza tra l' antecedente e il conseguente d' una ragione aritmetica dicesi *valore* di questa. Così 8 . 4 ha per valore 8—4 cioè 4, e del pari $a - b$ esprimerà il valore di $a \,.\, b$.

Il quoziente poi che si ricava dal dividere l' antecedente pel conseguente di qualsivoglia ragione geometrica si chiama *nome*, *valore* ed anche *esponente* di essa ragione, però il valore di 8 : 2 sarà $\frac{8}{2}$ cioè 4. Similmente la ragione geometrica $ab : a$ avrà per valore $\frac{ab}{a}$ ossia b.

§. 78. Una ragione aritmetica non è punto mutata per accrescere o scemare i suoi due termini d' una stessa quantità; chè per questo, come si vede, non vien cangiata la differenza, e perciò nè anche il valore della ragione. E in simil guisa non si cangia la ragione geometrica perchè sia moltiplicato o diviso ciascun de' suoi termini per una quantità eguale; perocchè essa, a dir proprio, consiste in una frazione, (§. ant.) il cui valore non è per nulla cangiato ancorchè la si moltiplichi o si divida per un numero stesso.

§. 79. L' eguaglianza di due ragioni forma la così detta *proporzione*, la qual pure è *aritmetica* o *geometrica* secondo la specie delle ragioni ond' è composta. A una proporzione aritmetica suolsi pur attribuire il nome di *equidifferenza*.

Quindi poichè tra 10 e 7 passa la stessa differenza che trà 18 e 15, i termini 10, 7, 18, 15 sono in proporzione aritmetica. A fine di notarla è uso di scrivere

$$10-7=18-15,$$

o più communemente

$$10 . 7 : 18.15,$$

e si legge 10 *sta aritmeticamente a* 7 *come* 18 *sta a* 15.

Ed in generale

$$a-b=c-d,$$

ovvero $a . b : c . d$

vale a significare una qualsivoglia proporzione aritmetica.

Parimente siccome il 2 sta nel 6 le tante volte quante il 7 è contenuto nel 21, le quantità 2,6,7,21 costituiscono una proporzione geometrica. Per ciò indicare si scrive

$$\frac{6}{2}=\frac{21}{7},$$

ma più spesso $6 : 2 : : 21$

e si dice che 6 *sta a* 2 *come* 21 *a* 7. Una qualunque proporzione geometrica viene generalmente rappresentata per

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

e più di frequente per

$$a : b : : c : d.$$

Il primo e l' ultimo termine di una proporzione si dicono *gli estremi*; il secondo e il terzo son detti i *medj*: se i due medj sono eguali, il termine ripetuto chiamasi *medio aritmetico*, o *geometrico proporzionale*, e la proporzione vien detta *continua*.

Così per maniera d' esempio:

$$3 . 7 : 7 . 11$$

formano una proporzione aritmetica continua che più sovente si scrive così

$$\div 3 . 7 . 11$$

e si pronuncia: *proporzione aritmetica continua* 3 *a* 7 *come* 7 *a* 11. Quindi $\div a . b . c$ vale per indicare la proporzione aritmetica continua di a a b a c.

Similmente $5 : 20 : : 20 : 80$

è una proporzione geometrica continua che per brevità viene scritta nella forma seguente

$$\div\div 5 : 20 : 80$$

e si legge *proporzione geometrica continua* 5 *a* 20 *come* 20 *a* 80; perciò

$$\div\div a : b : c$$

esprime la proporzione geometrica continua dell' a a b a c.

§. 79. Ciò premesso facciamoci prima a toccare brevemente le principali proprietà delle proporzioni aritmetiche, e poscia discorreremo più a lungo sopra le proporzioni geometriche.

Primieramente; in qual s' è proporzione aritmetica la somma dei termini estremi eguaglia la somma dei medj. Di fatto abbiasi l' equidifferenza

$$a \,.\, b : c \,.\, d,$$

od anche $a-b=c-d$.

Questa, che è una vera equazione, col solo trasportare il d nel primo membro e così il b nel secondo (ciò è lecito purchè sien pure mutati i segni ad essi termini) viene ad essere $a+d=b+c$.

Qualora la proporzione fosse continua e però si avesse

$$a \,.\, b : b \,.\, d$$

tenendosi al modo suddetto se ne cava fuori $a+d=2b$. Il che è quanto dire che la somma degli estremi si è pari al doppio del termine medio.

Sia $12 \,.\, 7 : 20 \,.\, 15$, e si avrà

$$12+15=7+20;$$

ma avendo $\div\ 5 \,.\, 8 \,.\, 11$

sarà $5+11$ doppio del termine medio 8.

Per converso: Dato vi sieno quattro termini tali che la somma degli estremi non differisca

dalla somma de' medj, essi potran mai sempre formare una proporzione aritmetica. Per effetto sia

$$a+d=c+b,$$

e siffatta equazione può venir trasformata in

$$a-b=c-d$$

e quindi in $a \,.\, b : c \,.\, d$.

Per tal guisa, posto

$$8+6=12+2, \text{ sarà}$$
$$8-2=12-6, \text{ e però}$$
$$8 \,.\, 2 : 12 \,.\, 6.$$

Di qui ne consegue che in ogni proporzione aritmetica dato che si abbiano tre termini sarà facil cosa il ritrovare il quarto.

Sia x il termine incognito e si abbia

$a \,.\, b : c \,.\, x$, avremo

$$a+x=b+c$$

e poscia $x=b+c-a$.

Caso che si avesse

$a \,.\, b : x \,.\, d$ ne verrebbe

$$b+x=a+d$$

e di qui $x=a+d-b$.

Dunque se il termine ricercato è uno degli estremi, per discoprirlo non si ha che a sottrarre l' altro estremo dalla somma de' medj; se poi fosse uno, de' medj si ricava con sottrarre l' altro medio dalla somma degli estremi.

Vogliasi il quarto termine della proporzione $34 \,.\, 58 : 26 \,.\, x$. In prima uguaglisi la somma degli estremi e dei medj

$$34+x=58+26, \text{ e poi si troverà}$$
$$x=58+26-34=50.$$

Si vuol conoscere l' uno dei medj della proporzione

$$48 \,.\, 25 : x \,.\, 33.$$

A ciò basterà trasformarla nell' equazione

$$25+x=48+33 \text{ e quindi}$$
$$x=48+33-25=56.$$

Data la proporzione aritmetica continua

$$a \,.\, x : x \,.\, b \text{ se ne ritrae}$$
$$2x=a+b \text{ ed } x=\frac{a+b}{2}:$$

e perciò il termine medio è pari a mezza la somma degli estremi. Che se abbiansi i termini 7 e 25 e se ne cerchi il medio aritmetico proporzionale, sarà pur bastevole far l'addizione di 7 e 25 e prender quindi la metà della lor somma 32. Una siffatta metà sarà il medio aritmetico ricercato.

Tanto basti aver detto intorno alle proporzioni aritmetiche.

Nota. Poichè ogni proporzione risulta da due ragioni eguali ne segue che una *proporzione* qualunque non è altro, a dir proprio, che una equazione espressa per via di segni diversi. Di fatti tosto si vede che convengono a pieno, quanto al significato, e la *proporzione* aritmetica $a \,.\, b : c \,.\, d$ colla *equazione* $a-b=c-d$, e *l'equazione* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ con la *proporzione geometrica* $a : b :: c : d$.

§. 80. Veniamo alle proporzioni geometriche, dette semplicemente *proporzioni*. Le proporzioni geometriche hanno una singolar proprietà, ed è, che in esse il prodotto degli estremi è mai sempre uguale al prodotto dei termini medj.

Data per es. la proporzione

$$a : b :: c : m \text{ se ne avrà}$$
$$am=bc.$$

E per verità se $a : b$ si è $=c : m$ sarà pure $\frac{a}{b}=\frac{c}{m}$. Le quali due frazioni ridotte che sieno allo stesso denominatore, danno $\frac{am}{bm}=\frac{bc}{bm}$. Qui i denominatori sono eguali. Se dunque ha da verificarsi l' uguaglianza di tali due ragioni, devon pur essere uguali i numeratori cioè a dire $am=bc$. Ma am si è il prodotto degli estremi della suddetta proporzione, bc n'è il prodotto de' medj. Siffatta dimostrazione può adattarsi istessamente ad ogni qualsiasi proporzione geometrica: quindi è da conchiudere in generale che in ogni proporzione geometrica il prodotto degli estremi eguaglia sempre il prodotto de' medj.

Perciò nella proporzione $2:6::7:21$ si avrà $2\times21=6\times7$.

Conseguentemente se la proporzione è continua per es. $\div\, a:b:m$ cioè

$$a:b::b:m$$

se ne ricaverà $am=b^2$; ciò è un dire che in essa il prodotto degli estremi eguaglia il quadrato del medio proporzionale.

Abbiasi $\div\, 12:6:3$ e ne verrà $12\times3=6\times6$.

E per opposto, qualora vi sieno quattro termini così fatti che il prodotto degli estremi sia eguale a quello dei medj, se ne potrà mai sempre formare una proporzione. In fatto supposta l' equazione $am=bc$, se ne divida ambedue i termini per bm, fattori ne' due membri, e ne risulterà

$\frac{am}{bm}=\frac{bc}{bm}$ e quindi $\frac{a}{b}=\frac{c}{m}$ e però $a:b::c:m$.

Pertanto se $2\times21=6\times7$ n' avremo

$\frac{21}{7}=\frac{6}{2}$, e quindi

$$21:7::6:2.$$

Una tal conclusione vale per ogni caso particolare.

§. 81. Da quanto sopra apparisce che, dati tre termini d' una proporzione, si può agevolmente discoprire il quarto. Sia

$$a:b::c:x$$

e si avrà $a\times x=bc$ onde ne risulta

$$x=\frac{bc}{a}:$$

e perciò a fin di trovare uno degli estremi basterà dividere il prodotto dei medj per l'altro estremo.

Sia $a=3$, $b=12$ e $c=7$ e sarà

$$x=\frac{12\times7}{3}=\frac{84}{3}=28:$$

ed infatti egli è $3:12::7:28$.

Se poi abbiasi $a:b::x:c$

n' avremo $bx=ac$ e quindi $x=\frac{ac}{b}$.

E però a ritrovare un termine medio si divide il prodotto degli estremi per l' uno dei medj. Quindi fatto

$a=15$, $b=5$, $c=4$ si otterrà

$x=\frac{15\times4}{5}=\frac{60}{5}=12$; e per vero

$$15:5::12:4.$$

Dato che la proporzione sia continua

$a:x::x:b$ se ne ricava

$x^2=ab$ e di qui $x=\sqrt{ab}$.

Pertanto a discoprire il termine medio non si vuol far altro che estrarre la radice quadrata dal prodotto degli estremi.

Pongasi $a=3$, $b=12$ e riuscirà

$$x=\sqrt{3\times 12}=\sqrt{36}=6.$$

§. 82. Per le cose dette sinora si raccoglie che, se quattro termini sono in proporzione, non cesseranno di esserlo pur tuttavia comunque ne sia mutato l'ordine, purchè in ciò fare non si tolga l'eguaglianza tra il prodotto degli estremi e il prodotto dei medj.

Di qui è che una proporzione, qual è p. es. $a : b :: c : d$, per nulla è tolta, se (cambiando luogo agli estremi ed ai medj o come dicesi *alternando* i termini) si scriva $d : b :: c : a$ ovvero $a : c :: b : d$. Parimente non vien distrutta la proporzione di essi termini qualora gli estremi si fanno divenir medj, e così i medj si cangiano in estremi scrivendo

$$b : a :: d : c.$$

Questo è ciò che si dice *invertere* le ragioni.

E con siffatte operazioni si può scambiare una proporzione in otto forme diverse, senza che per questo ne venga alterata.

§. 83. Più altri cambiamenti si possono ancor fare in ogni qualunque proporzione senza nè punto guastare l'egualità che vi ha tra il prodotto degli estremi e quello de' medj, e perciò nè anche essa proporzione.

In prima; se il secondo termine si aggiunga ovvero sottraggasi dal primo e così il quarto dal terzo non per questo la proporzione verrà distrutta. La prima operazione è ciò che si dice *comporre*, e l'altra è *dividere* la proporzione.

E per effetto, sia data la proporzione

$$a : b :: c : d;$$

fatte le permutazioni divisate, si avrà

$$a+b : b :: c+d : d$$
$$a-b : b :: c-d : d;$$

di qui cangiato luogo ai medj ne ricaveremo

$$a+b : c+d :: b : d$$
$$a-b : c-d :: b : d;$$

Ma operando un simil mutamento sopra

$$a : b :: c : d$$

ne risulta $\quad a : c :: b : d:$

e poichè $a : c = b : d$ ne verrà per conseguente

$$a+b : c+d :: a : c :: b : d,$$
$$a-b : c-d :: a : c :: b : d.$$

Adunque in una qualsiasi proporzione *la somma o la differenza dei due primi termini sta alla somma o differenza dei due ultimi come il primo sta al terzo, o come il secondo sta al quarto.*

Essendo $15 : 5 :: 6 : 2$,

composte, e divise le ragioni sarà

$$15+5 : 5 :: 6+2 : 2 \text{ e } 15-5 : 5 :: 6-2 : 2$$

cioè $20 : 5 :: 8 : 2$, e $10 : 5 :: 4 : 2$.

Di più ancora: per essere le ragioni $a : c$ e $b : d$ del pari communi a tutte e due le proporzioni qui sopra recate, ne segue che l' altre due ragioni di esse proporzioni son pure eguali, e quindi

$$a+b : c+d :: a-b : c-d,$$

ovvero, mutando luogo ai medj

$$a+b : a-b :: c+d : c-d$$

vale a dire: che *la somma dei due primi termini d' una proporzione sta alla differenza dei termini stessi; come la somma degli ultimi due sta alla differenza che passa tra questi ultimi termini.* Vaglia un esempio;

$$6+4 : 6-4 :: 18+12 : 18-12$$

e ciò che è lo stesso $10 : 2 :: 30 . 6$

Se pongasi mente che nello scambiare $a : b :: c : d$ in $a : c :: b : d$; a e b sono gli antecedenti, c e d i conseguenti; le proporzioni

$$a+b : c+d :: a : c :: b : d$$
$$a-b : c-d :: a : c :: b : d$$

esprimono: che *la somma, o la differenza degli antecedenti sta alla somma o alla differenza dei conseguenti; come ciascun antecedente sta al suo conseguente.* E quindi se ne raccoglie; *la somma degli antecedenti sta alla differenza che è tra loro, come la somma dei conseguenti sta alla lor differenza.*

Caso che abbiasi una serie di ragioni uguali

$$a : b :: c : d :: e : f$$

si risguardino innanzi le sole prime ragioni che formano la proporzione $a : b :: c : d$; per quanto sopra è detto se ne ricaverà

$$a+c : b+d :: a : b;$$

e poichè la terza ragione $e : f$ si è uguale alla prima $a : b$, avremo

$$a+c : b+d :: e : f.$$

Ora in questa proporzione si prenda la somma degli antecedenti, e così parimente la somma dei conseguenti, e ne risulterà

$$a+c+e : b+d+f :: e : f :: a : b$$

E posto s'avesse un molto maggior numero di ragioni eguali, si continuerà a un medesimo tenore, e da ultimo si troverà: che la *somma d' un numero qualunque di antecedenti sta alla somma dei loro conseguenti, come ciascuno antecedente sta al suo conseguente.*

Sia $20 : 5 :: 4 : 1 :: 12 : 3 :: 8 : 2$,

raccogliendo si avrà la proporzione

$$20+4+12+8 : 5+1+3+2 :: 4 : 1.$$

cioè $44 : 11 :: 4 : 1$ ecc.

§. 84. Qualora due proporzioni abbiano una ragione uguale, l' altre due ragioni saran pure manifestamente eguali: e però se ne potrà formare una proporzione.

Dato che sia $a : b :: c : d$
$e : f :: c : d$

sarà per necessaria conseguenza

$$a : b :: e : f.$$

Allorchè gli antecedenti di due proporzioni sono i medesimi, dei conseguenti se ne può fare una proporzione: perchè, se si ha

$$a : b :: c : d$$
$$a : e :: c : f$$

cangiando i medj di posto, queste proporzioni

diveranno $a : c :: b : d$
$a : c :: e : f$

e quindi sarà $b : d :: e : f$

ciò che riducesi a; $b : e :: d : f$.

Parimente se i conseguenti sono communi, gli antecedenti saranno proporzionali.

§. 85. Date due proporzioni, qualora vengano moltiplicati e divisi i termini dell' una per i termini corrispondenti dell' altra, i prodotti nel primo caso ed i quozienti nel secondo rimarranno ancora proporzionali.

Sieno le due proporzioni

$$a : b :: c : m$$
$$r : s :: t : u,$$

e si avrà primieramente

$$am = bc, \text{ ed } ru = st,$$

e fatta la moltiplicazione di am per ru, e di bc per st ne verrà $amru = bcst$, e quindi

$$am : bc :: st : ru.$$

Divisa poi che si abbia l'equazione $am = bc$ per l' equazione $ru = st$ ne risulta

$$\frac{am}{ru} = \frac{bc}{st}, \text{ e di quì}$$

$$\frac{a}{r} : \frac{b}{s} :: \frac{c}{t} : \frac{m}{u};$$

ciò verifica appieno la sovraesposta proposizione.

Abbiasi $24 : 18 :: 48 : 36$,
$2 : 3 :: 6 : 9$

se n'avrà $24\times2 : 18\times3 :: 48\times6 : 36\times9$, cioè
$48 : 54 :: 288 : 324$.

Inoltre sarà $\frac{24}{2} : \frac{18}{3} :: \frac{48}{6} : \frac{36}{9}$, ovvero

$12 : 6 :: 8 : 4$

§. Posto vi siano quattro termini in proporzione, le uguali potenze e così le radici di essi termini saranno pure proporzionali.

1.° Abbiasi la proporzione

$$a : b :: c : m;$$

scritta che sia due volte se ne moltiplichino fra loro i termini per ordine

$$a : b :: c : m,$$
$$\underline{a : b :: c : m,}$$

e si avrà $a^2 : b^2 :: c^2 : m^2$;

e moltiplicando i termini di quest' ultima per i termini rispettivi della data proporzione si otterrà

$$a^3 : b^3 :: c^3 : m^3,$$

e così via via.

2.° Sia data la proporzione

$$a^2 : b^2 :: c^2 . m^2,$$

e sarà $\sqrt{a^2} : \sqrt{b^2} :: \sqrt{c^2} : \sqrt{m^2}$.

E per vero da essa proporzione fatto il prodotto degli estremi e de' medii si avrà

$$a^2m^2 = b^2c^2,$$

e di quì, cavata che si abbia la radice quadrata ne verrà

$$am = bc,$$

e perciò $a : b :: c : m$.

Non diverso è il raziocinio che si vuol fare per vedere che dato

$$a^3 : b^3 :: c^3 : m^3$$

sarà pure $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} :: \sqrt[3]{c} . \sqrt[3]{m}$

Similmente avendo

$$r : s :: t : u$$

si dimostrerà essere

$$\sqrt{r} : \sqrt{s} :: \sqrt{t} : \sqrt{u}.$$

Posto che si abbia

$$9 : 4 :: 81 : 36,$$

fattone il quadrato sarà

$$81 : 16 :: 6561 : 2282,$$

e così pure per le radici si avrà

$$\sqrt{9} : \sqrt{4} :: \sqrt{81} : \sqrt{36};$$

e dicasi il medesimo rispetto ai cubi e alle radici cubiche, giacchè per tutte si fatte permutazioni gli estremi daranno mai sempre un prodotto uguale al prodotto de' medj.

Le proprietà fin quì discorse, perchè indipendenti dal valore che le cifre algebriche possono avere, convengono in generale a qualunque proporzione.

§. 87. Dicesi *ragione composta* quella, il cui valore è uguale al prodotto dei valori di altre date ragioni.

Così la ragione $acm : a \ (=cm)$

è composta delle ragioni

$$bc : b, \text{ ed } sm : s,$$

perocchè il valore di essa

$$\frac{acm}{a}\left(=cm\right)$$

uguaglia il prodotto di c (valore della ragione $bc : b$) per m, valore della ragione $sm : s$.

Similmente la ragione

$$24 : 3 \ (=8)$$

è composta delle ragioni

$$10 : 5 \ (=2),$$
$$\text{e } 12 : 3 \ (=4),$$

perocchè $8=2\times4$.

Suolsi ancora nominare *composta* quella ragione che risulta da due o più ragioni, i cui antecedenti si sono moltiplicati l' un per l'altro e così pure i conseguenti.

Per tal modo, se abbiansi le due ragioni

$$12 : 4,$$
$$25 : 5$$

il prodotto degli antecedenti sarà 300, e quello dei conseguenti sarà 20: la ragione

$$300 : 20$$

sarà composta di

$$12 \ a \ 4 \ (=3)$$
$$\text{e di } 25 \ a \ 5. \ (=5)$$

Se ben si osserva tutte e due le definizioni che si sono recate intorno alla ragion composta dicono il medesimo, giacchè il valore di $300 : 20$ (ragione composta al modo pur ora detto) si è 15, e 15, come si vede è appunto il prodotto di 3 e 5 che sono i valori delle due ragioni componenti $12 : 4$ e $25 : 5$.

§. 88. Quando il valore d' una ragione è quadrato del valore d' un' altra ragione la prima è detta *quadrata* o *cubica* della seconda.

Però $ac^2 : a$

è quadrata della ragione $bc : b$;

e in pari modo la ragione 18 : 2

è quadrata di 30 : 10.

La ragione di $cm^3 . c$ è cubica di $am : a$,

sì come 48 : 6 lo è di 30 : 15.

Di qui è che una ragione composta di due ragioni eguali sarà quadrata di tutte e due. Sieno le due ragioni uguali

$$am : a \,,\; cm : c$$

e (moltiplicati per ordine) se ne componga la ragione

$$acm^2 : ac,$$

il cui valore è m^2 quadrato del valore di ambedue le ragioni cioè m; perciò essa ragione

$$acm^2 : ac$$

è quadrata di ciascuna di esse.

Medesimamente la ragione composta di tre ragioni uguali è cubica di ciascuna delle date ragioni. Finalmente per ciò che si è detto si può raccogliere che quella ragione, il cui valore è radice quadrata del valore di un' altra data ragione si vuol denominare ragione *sottoquadrata* dell' altra. Quindi è che la ragione

$bm : b$ è sottoquadrata di $am^2 : a$,

perchè il suo valore m è radice quadrata di m^2 valore di $am^2 : a$.

In simil guisa la ragione

30 : 10

è sottoquadrata di 18 : 2,

perchè $\frac{30}{10}(=3)$ è radice quadrata del valore $\frac{18}{2}(=9)$
Una ragione il cui valore è radice cubica del valore di un' altra ragione si dirà *sottocubica* dell' altra, ecc.

§. 83. Che se due quantità variabili sieno tra esso loro sì fattamente connesse che al crescere o scemare dell' una, e l' altra in egual maniera si aumenti o diminuisca, esse diconsi in *ragione diretta semplice.* Se poi l' una venga a scemare di tanto, quanto l'altra s' accresce, le due quantità diconsi essere in *ragione semplice inversa.*

Per ciò dichiarare vaglia un esempio. Fingiamo che dei termini di una proporzione i primi due si riferiscano a una tal merce, e gli altri della seconda ragione ne dinotino il prezzo. Egli è certo che raddoppiandosi, triplicandosi ecc. la merce il prezzo si farà pur doppio, triplo ecc. E per opposto si vede che alla metà, a un terzo ecc. della merce ha da corrispondere una metà, un terzo ecc. del prezzo. Quindi si dirà che la merce e il suo prezzo sono in ragione *diretta semplice.*

Supposto che i termini della prima ragione si riferiscano a un dato numero di operai, e quei della seconda al tempo che essi impiegano a compiere un certo lavoro, si vede che a tal effetto duplicandosi o triplicandosi ecc. il numero dei lavoratori, basta la metà, o il terzo di tempo ecc. e viceversa. Perciò il numero degli operai e il tempo da essi posto a un tal lavoro sono in *ragione inversa.*

Alla perfine se tale è la connessione fra le quantità variabili che l'una cresca nella medesima ragione che s'aumenta il quadrato o il cubo dell'altra, la prima si dirà essere in ragione *diretta quadrata*, o *diretta cubica* della seconda. Ma dato che l'una scemasse per egual modo che crescono i quadrati e i cubi del l'altra, la prima sarà in ragione *inversa quadrata* o *inversa cubica* della seconda.

Se alcuna quantità cresce nella stessa ragione che il prodotto di più altre quantità, la prima si dice che è in ragione *composta* di queste tutte. Le ragioni composte sortono diverso nome secondo la qualità delle ragioni che le compongono.

Così per maniera d'esempio nella proporzione

$$a : b :: mp : nq,$$

i termini della prima ragion si diranno nella ragion composta e diretta dei termini delle due ragioni $m : n$, e $p : q$, ecc.

Or qui sarebbe a parlare della regola *del Tre*, e dell'altre tutte che da essa derivano, ma posciachè in Aritmetica se n'è ragionato in bastevol tenore, le tralasciamo.

CAPO OTTAVO.

Delle progressioni aritmetiche.

§. 90. Si chiama *progressione* aritmetica una serie di termini ciascuno de' quali è superato di tanto da quello che lo segue di quanto esso supera il termine precedente, o per opposto. Sì fatta è la serie dei numeri

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19 \text{ ecc.},$$

e si vede che la differenza tra 1 e 4 $(=3)$ è la stessa che tra 4 e 7, tra 7, e 10 e così via via.

Le progressioni aritmetiche, dette anche *progressioni per differenze* sogliono accennarsi premettendo ad esse una linea orizzontale tra due punti e ponendo un punto fra un termine e l'altro in questa maniera;

$$\div\ 5 \,.\, 11 \,.\, 17 \,.\, 23 \,.\, 29 \ldots$$

e si legge 5 *sta, a* 11, *come* 11 *sta a* 17, *come* 17 *sta a* 23 ecc.

Quindi una progressione aritmetica, non è altro, a dir proprio, che una successione di proporzioni aritmetiche continue (§. 79), dove ciascun termine, salvo il primo e l'ultimo, si trova a un tempo e conseguente del termine che lo precede ed antecedente del termine che gli viene appresso.

La costante differenza che passa tra l'un termine e l'altro che immediatamente segue è detta ancora la *ragione* della progressione. Per tal modo la differenza che passa tra 5 e 11 ecc. è la ragione della progressione soprarrecata.

§. 91. Una progressione, i cui termini vanno successivamente aumentando chiamasi *divergente* o *crescente*, e tale si è ad esempio

$$\div 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 16 \cdot 19 \ldots \text{ ecc.}$$

qualora i termini scemassero di mano in mano la progressione sarebbe *convergente* o *decrescente* sì come

$$\div 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 0 \cdot -2 \cdot -4 \cdot -6 \cdot -8 \ldots \text{ ecc.}$$

Di qui si scorge che la cifra *o* può essere anche termine d' una progressione aritmetica.

§. 92. In generale; se chiamisi a il primo termine d'una progressione aritmetica crescente, e d la differenza fra due suoi termini successivi, il secondo termine eccederà il primo della quantità d e sarà perciò $a+d$, il terzo sarà $a+d+d$ ossia $a+2d$, il quarto $a+3d$, ecc. Pertanto la progressione aritmetica crescente può rappresentarsi generalmente così;

$$\div a \cdot a+d \cdot a+2d \cdot a+3d \cdot a+4d \cdot a+5d \ldots \text{ ecc.};$$

ora qui è visibile che un termine qualunque è uguale al primo accresciuto di tante volte la differenza quanti sono i termini che precedono il termine che si riguarda. Il medesimo si verifica in tutte progressioni aritmetiche. Sia data ad es. la progressione

$$\div 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \ldots$$

e si vedrà che ogni termine di essa risponde perfettamente a ciascun dei termini della progressione che segue:

$$\div 3 \cdot 3+2 \cdot 3+2+2 \cdot 3+2+2+2 \ldots \text{ ecc.};$$

perciò l' ultimo di n termini di una progressione, ossia il termine *ennesimo* conterrà la differenza tante volte quante ne vengono espesse per $n-1$. E quindi se tale ultimo termine facciasi $=u$, si avrà

$$u=a+d\ (n-1).$$

Abbiasi per es. la progressione

$$\div 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \ldots \text{ ecc.}$$

e fatto il primo termine $3=a$ e $d=2$, si troverà per ultimo termine $3+2\ (8-1)=17$.

Di qui parimente risulta che basta conoscere un termine e la differenza, perchè si possa venire in cognizione di un altro qualunque termine, di cui è noto il luogo. In tal caso, dato che si volesse, per cagion d'esempio, il centesimo termine, non si dovrà che aggiungere al primo 99 volte la differenza.

§. 93. Ove poi la progressione fosse decrescente si avrà

$$\div a \cdot a-d \cdot a-2d \cdot a-3d \cdot a-4d \ldots \text{ ecc.}$$

ed il termine *ennesimo* verrà espresso per la formola

$$u=a-d\ (n-1).$$

Il che val quanto dire, un termine qualunque d'una progressione decrescente è uguale al primo termine scemato di tante volte la differenza quanti sono i termini che gli sono avanti.

§. 94. Nella formola data (§. 92.) è pur da avvertire che il secondo termine comprende una differenza più del primo ed il penultimo una meno che l' ultimo; che il terzo termine ha due differenze più del primo, e l' antipenultimo ne ha due meno che l' ultimo ecc.

Chi ciò ben considera non gli riuscirà difficile l' intendere che sommando il secondo termine e il penultimo, il terzo e l'antipenultimo, cioè a dire due termini a pari distanza dagli estremi, deve risultarne sempre una somma pari a quella che si ottiene aggiugnendo il primo all' ultimo. Se il numero de' termini è dispari allora la somma degli estremi equivale al doppio del termine medio.

Così nella progressione aritmetica

$$\div\ a\ .\ a+d\ .\ a+2d\ .\ a+3d\ .\ a+4d\ .\ a+5d....$$

sommati insieme i due estremi e i medj a pari distanza a due a due si eguaglieranno come segue:

$$a+(a+5d)=a+d+(a+4d)$$
$$=a+2d+(a+3d)=2a+5d.$$

§. 95. Da quanto sopra, consegue che la somma di tutti i termini di una progressione aritmetica qualunque è eguale a mezza la somma degli estremi moltiplicata pel numero dei termini, o ciò che è lo stesso, è uguale all' intera somma degli estremi moltiplicata per la metà del numero dei termini.

E per vero; il numero de' termini della progressione o si è pari, o dispari.

Posto il primo caso, se in essa progressione si prendono due termini ad eguale distanza dagli estremi, questi due termini e gli estremi formeranno una proporzione aritmetica (§. ant.) Per tanto invece di due termini posti ad eguale distanza si può prendere la somma degli estremi. Ed è però che la progressione aritmetica eguaglia una serie d' un pari numero di termini, ciascuno de' quali fosse equivalente a mezza la somma degli estremi. Così ad es. la

$$\div\ 8\ .\ 6\ .\ 4\ .\ 2$$

si è uguale alla $\div\ 5\ .\ 5\ .\ 5\ .\ 5$.

ciascun termine della quale eguaglia la metà somma degli estremi

$$\frac{8+2}{2}=5.$$

Ora egli è chiaro che la somma di quest' ultima serie è eguale al prodotto d' uno de' suoi termini moltiplicato pel numero de' termini di tutta la progessione. Dunque la somma della progressione aritmetica è uguale alla metà somma degli estremi moltiplicata pel numero de' termini: o ciò che torna a un medesimo, è uguale alla somma degli estremi moltiplicata per la metà del numero dei termini.

Perciò nel caso nostro sarà

$$\left(\frac{8+2}{2}\right) 4=8+6+4+2=20.$$

Nel secondo caso, qualvolta cioè il numero dei termini della progressione sia dispari, il termine di mezzo forma con gli estremi una proporzione continua, sicchè (§. 79.) questo termine è la metà della somma degli estremi.

Epperò: $\div$ 2 . 4 . 6 . 8 . 10 :

darà 2 . 6 : 6 . 10

e quindi $\frac{2+10}{2}=6.$

D' altra parte siccome due termini presi ad una qualunque (purchè uguale) distanza degli estremi formano con questi sempre una proporzione aritmetica; per tanto qui ancora la progressione si può risguardare come formata di termini tutti eguali a mezza la somma degli estremi, e quindi se ne possono inferire le stesse conseguenze che nel caso di prima. E la progressione suddetta si vede essere uguale a una progressione, i cui termini fossero tutti $\left(\frac{10+2}{2}\right)=6$. Perciò la somma di n termini di

una progressione fatta $=s$, si avrà la formola generale $s=(a+u)\frac{n}{2}$.

Abbiasi $\div a . a+d . a+2d . a+3d . a+4d . a+5d$,

la somma sarà $(a+a+5d)\times\frac{6}{2}=6a+15d.$

Similmente data $\div$ 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17, ecc.

si avrà per l' intera somma

$$(2+17)\frac{6}{2}=57.$$

§. 96. Nelle due equazioni trovate pur ora; (§. 92. §. 95.)

$$u=a+d\ (n-1),\quad s=(a+u)\frac{n}{2}$$

sono comprese le cinque quantità a, u, d, n, s cioè a dire il *primo e l' ultimo termine*, *la differenza*, *il numero de' termini*, e la *somma*, che è quanto si vuol considerare nelle progressioni aritmetiche.

E, poichè essendovi due equazioni si può ritrovare il valore di due quantità incognite dipendenti da esse equazioni, di quì è che date 3 delle suddette quantità non sarà gran fatto difficile il determinare le altre due.

Prima che veniamo a fare l' applicazione dei principj stabiliti è da sapere che *inserire* fra due numeri determinati molti *medj proporzionali aritmetici* altro non è che collegare due termini per successione di quanti altri termini si vogliano, e ciò per tal modo che ne riesca una progressione aritmetica.

Ora facciamoci a risolvere alcuni problemi.

§. 97. Prob. « Si vogliono inserire 8 medii proporzionali aritmetici tra 1 e 100 di guisa che ne risulti una progressione aritmetica ».

Qui si tratta di fare una progressione aritmetica, il cui primo termine a sia $=1$, u sia $=100$, e nella quale avendosi a trovare 8 termini senza il primo e l'ultimo sarà $n=10$. Per venire in cognizione del secondo termine e de' successivi, convien solo ritrovarne la differenza. A tal effetto, nell' equazione

$$u=a+d\ (n-1)$$

si pongano in vece di a, u, n i loro proprii valori

e si avrà $\quad 100=1+d\ (10-1)$,

ossia $\quad 100=1+9d$,

onde $\quad 9d=99 \quad$ e $d=\frac{99}{9}=11$.

Quindi la differenza è 11, e però il secondo termine sarà $1+11$ ossia 12, il terzo $12+11$ ossia 23 ecc. Di che ne viene la progressione

$$\div\ 1\ .\ 12\ .\ 23\ .\ 34\ .\ 45\ .\ 56\ .\ 67\ .\ 78\ .\ 89\ .\ 100.$$

§. 98. Prob. 2.° « Si vogliono inserire quattro termini fra 13 e 7. »

La progressione come si vede dev' essere decrescente, e perciò fatto

$$a=13, \quad u=7, \quad n=6,$$

usando la solita formola se ne ricaverà

$$7=13-d\ (6-1),$$

ossia $\quad 7=13-5d$,

e quindi $\quad d=\frac{7-13}{5}=-\frac{6}{5}$.

Per tanto $\frac{6}{5}$ sarà la differenza comune, e tolta questa da ciascun termine a cominciare dal primo e via progredendo innanzi ne verrà la progressione

$$\div\ 13\ .\ 11\tfrac{4}{5}\ .\ 10\tfrac{3}{5}\ .\ 9\tfrac{2}{5}\ .\ 8\tfrac{1}{5}\ .\ 7.$$

§. 99. Prob. 3.° « Dopo gli esperimenti di Galileo è conosciuto che un corpo cadendo per virtù di gravità scorre nel primo minuto secondo a un dipresso 15 piedi, e 45 ne scorre nel minuto secondo che segue, e così successivamente in progressione aritmetica. Ora si vuol sapere quanto spazio avrà percorso, fatto caso che abbia durato 6 secondi nella sua caduta. «

Se ben si riguardi questo problema si vedrà che per esso non altro si cerca fuorchè una progressione, il cui primo termine $a=15$ piedi, la differenza $d=30$, e il numero de' termini $n=6$. Ciò posto la somma sarà

$$s=15+u\times\frac{6}{2}.$$

Ora per la formola $\quad u=a+d\ (n-1)$

si ricava $u=15+30\,(6-1)=15+150=165$,

e perciò $s=15+165\times\frac{6}{2}=180\times3=540$.

Onde il corpo dopo sei minuti secondi avrà percorso 540 piedi.

§. 100. Prob. 4.° « Un proprietario conviene di pagare a un lavoratore 180 franchi per lo scavo d'un pozzo di 30 metri, e ciò nell'espresa supposizione che l'acqua non possa ritrovarsi se non ad una tale profondità. Fatto lo scavamento di soli 20 metri, s'incontra l'acqua, e nasce questione tra l'operajo che domanda esser pagato in ragione del numero dei metri da esso lui scavati e il proprietario che vuol dare minor somma, allegando che i 20 metri primitivi hanno un valore proporzionatamente minore dei dieci più profondi. Un arbitro decide che a misura della maggiore profondità lo scavo ha d'avere una più larga mercede, di guisa che, se il primo metro importasse un franco, il secondo ne varrebbe 2 il terzo 3 il quarto 4 ecc. Si vuol stabilire sopra una tal decisione a qual prezzo il proprietario sia obbligato a pagare l'opera del lavoratore. «

Se pel primo metro si fosse convenuto il prezzo d'un franco, giusta la decisione dell'arbitro pel *ventesimo* si avrebbe a pagare 20, e 30 per il *trentesimo*. Perciò i trenta metri avrebbero importato tanti franchi quant'è la somma della progressione

$$\div\ 1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots\ldots 30,$$

ed il prezzo di 20 metri ascenderebbe alla somma dell'altra progressione

$$\div\ 1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots\ldots 20.$$

Fatto $a=1$, $u=30$, $n=30$ e sostituiti questi valori nella formola

$$s=(a+u)\frac{n}{2},$$

si avrà $s=(1+30)\,\frac{30}{2}=31\times15=465$;

e fatto $a=1$, $u=20$, $n=20$

sarà $s=(1+20)\frac{20}{2}=21\times10=210$.

Quindi posto che pel primo metro si fosse convenuto d'un franco, per trenta metri si conveniva dare 465, e per i 20 metri 210 franchi.

Per tanto si discorra in tal forma, se l'intero scavo d'un pozzo importa 465 franchi, per una parte di esso non se ne pagano che 210; dato che lo scavo totale si pagasse a 140 franchi, la detta sua parte quanto verrebbe a costare? Si formi la proporzione

$$465 : 180 :: 210 : x,$$

fatto $x=\frac{180\times210}{465}$

se ne ricaverà prossimamente a quarto termine fr. 81, 29.

E però questa sarà la somma che il proprietario deve all'operajo.

§. 101. Prob. 5.° « Un naviglio postosi alla vela, fece 6 leghe nel primo giorno, 13 nel secondo, 20 nel terzo e così di mano in mano sempre in progressione aritmetica in fino all' ultimo giorno, in cui si sa aver esso percorso lo spazio di 132 leghe; si vuol trovare quanti giorni abbia continuato il suo viaggio, e qual fosse la distanza tra il luogo onde si mosse, e quello ove si fermò. «

Qui le quantità conosciute sono, il primo termine $a=6$, l'ultimo $u=132$, e la differenza $d=7$; le altre due che si vogliono determinare sono n, numero dei giorni vale a dire dei termini della progressione, ed s somma di tutti i termini, ossia degli spazj percorsi durante il viaggio.

Dalla formola

$$u=a+d\ (n-1)$$

si ricava $u-a=d\ (n-1)$, e di quì $n-1=\frac{u-a}{d}$

e quindi ancora $n=1+\frac{u-a}{d}$,

dove posti invece di u, a, d i proprj valori si avrà

$$n=1+\frac{132-6}{7}=19;$$

perciò la nave avrà durato in suo cammino per 19 giorni. Conosciuto ora il numero de' termini esser 19 sarà agevole il ritrovarne la loro somma.

Dato $s=u+a\ (\frac{n}{2})$ se n' ha

$$s=132+6\ (\tfrac{19}{2})=138\times\tfrac{19}{2}=\frac{2622}{2}=1311.$$

Adunque l'intero viaggio percorso dal naviglio si è di 1311 leghe, ed è questa pure la distanza tra il luogo di partenza e quello d' arrivo.

Ma non più sopra le progressioni aritmetiche

CAPO NONO.

Delle progressioni geometriche.

§. 102. La progressione geometrica è una successione di termini per sì fatta maniera ordinati fra loro che quante volte il primo è contenuto nel secondo, altrettante il secondo è contenuto nel terzo, e così il terzo nel quarto ecc., o viceversa.

Tale si è la serie

2, 4, 8, 16, 32, 64 ecc.

dove è visibile che il 2 sta nel 4 tante volte che il 4 si contiene nell'8, e l'8 nel 16 e così via discorrendo per gli altri termini.

Quindi una progressione geometrica altro non è che una proporzione geometrica continua (§. 78.) prolungata a piacimento, o ciò che riesce a un medesimo, una serie di ragioni eguali.

Le progressioni geometriche, dette ancora *progressioni per quozienti*, sogliono indicarsi premettendo ad esse una linea orizzontale fra quattro punti e distinguendo per due punti l'un termine dall'altro così:

$$\div\, 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : \text{ecc.};$$

il che vale quanto scrivere 2 *sta a* 4, *come* 4 *a* 8, *come* 8 *a* 16 e va dicendo.

Il quoziente che viene dal dividere l'un termine per l'altro è la così detta *ragione* della progressione; per tal modo la suddetta progressione avrà per sua ragione il 2.

In generale; abbiasi la progressione *per quozienti*.

$$\div\, a : b : c : d : e : f : \text{ecc.}$$

fatto $\frac{b}{a}=q$ si avrà

$$q=\frac{b}{a},\ q=\frac{c}{b},\ q=\frac{d}{c},\ q=\frac{e}{d}\ldots$$

e perciò anche

$$b=aq,\ c=bq,\ d=cq,\ e=dq,\ \text{ecc.},$$

Ora sostituendo nell' equazione $c=bq$ al b il suo proprio valore aq si otterrà

$$c=aq\times q=aq^2.$$

e nella equazione $d=cq$ posto a luogo di c il suo valore aq^2 or ora trovato si ricaverà

$$d=aq^2\times q=aq^3;$$

e questo aq^3, valore di d sostituito nell' ultima equazione $e=dq$, dà

$$e=aq^3\times q=aq^4;$$

e così via discorrendo per tutti i termini della progressione

$$\div\, a : b : c : d : e : \text{ecc.}$$

alla fine se ne avrà

$$\div\, a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : \text{ecc.}$$

Laonde ogni progressione geometrica si potrà generalmente rappresentare per la formola seguente

$$\div\, a : aq : aq^2\ aq^3 : aq^4 : aq^5 : \text{ecc}:$$

In una sì fatta progressione se q è maggiore dell' unità ogni termine va sempre crescendo e la progressione in tal caso si dirà *crescente*; laddove se n'è minore i termini vanno a mano a mano scemandosi e la progressione sarà *decrescente*. In fatti sia per es. $q=\frac{1}{3}$ e il secondo termine sarà $a\times\frac{1}{3}$ ossia $\frac{a}{3}$, il terzo sarà $a\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$ ovvero $\frac{a}{9}$, il quarto $\frac{a}{27}$ ecc. onde la progressione diverrà

$$\div\, a : \frac{a}{3} : \frac{a}{9} : \frac{a}{27} : \text{ecc.}$$

Noi qui riguarderemo le progressioni geometriche solo come crescenti e quanto si dirà rispetto ad esse si potrà del pari adattare ad ogni progressione geometrica decrescente: perocchè sì all' una che all' altra competono le stesse proprietà.

§. 103. Qualora si osservi fisamente la formola assegnata per le progressioni geometriche si vedrà che ogni termine contiene il primo a, e che inoltre il secondo è moltiplicato per q, il terzo per q^2, il quarto per q^3 ecc.; il che viene a dire che *un termine qualunque si è ugale al primo moltiplicato pel quoziente innalzato alla potenza indicata dal numero degl' altri termini che lo precedono.*

In effetto la progressione

$$\div\!\div\ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : \text{ecc.}$$

è una stessa con le progressioni

$$\div\!\div\ 2 : 2\times2 : 2\times2\times2 : 2\times2\times2\times2 : \text{ecc.}$$

$$\text{e}\ \div\!\div\ 2 : 2\times2^1 : 2\times2^2 : 2\times2^3 : \text{ecc.}$$

Di qui è che l' ultimo termine di qualunque progressione geometrica sarà eguale al primo termine moltiplicato pel quoziente elevato a una potenza di tanti gradi quant' è il numero dei termini meno uno. Perciò se tale ultimo termine si esprime per u, ed n sia il numero dei termini, si avrà

$$u = aq^{n-1}.$$

Per tutto questo chiaro apparisce qual via abbiasi a tenere per ritrovare qualsivoglia termine d'una progressione senza che a ciò faccia d' uopo di conoscere in prima i termini posti di mezzo ad esso termine cercato e il primo.

Così per modo d' esempio dato si volesse il quinto termine della progressione

$$\div\!\div\ 2 : 6 : 18 : \text{ecc.}$$

non si ha che a moltiplicare il primo termine 2 pel quoziente 3 elevato alla quarta potenza, e ne verrà 243 che è appunto il termine ricercato.

Ad una stessa guisa si ritroverà che il settimo termine della progressione

$$\div\!\div\ 81 : 27 : \text{ecc.}$$

si è $\quad 81\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{81}{729} = \frac{1}{9}.$

E per effetto si vede che quindi se n' ha

$$\div\!\div\ 81 : 27 : 9 : 3 : 1 : \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{9}.$$

§. 104. Tornando alla formola generale

$$\div\!\div\ a : aq : aq^2 : qa^3 : aq^4 : \text{ecc.}$$

chi ben la considera agevolmente ne rileverà che il prodotto di due termini a pari distanza dagli estremi eguaglia il prodotto di essi estremi, il quale similmente è uguale al prodotto

degli intermedj se il numero dei termini è pari, e al quadrato del medio, se è impari.
E di fatti nella detta progressione si ha

$$aq \times aq^3 = a \times aq^4 = aq^2 \times aq^2.$$

Il medesimo è a dire di tutte quante progressioni geometriche si possono immaginare.

§. 105. Vogliasi ora trovare la somma di n termini della progressione

$$\div\div\ a : b : c : d : e : f \ldots : u,$$

di cui q esprime il quoziente. E perchè i termini d' una progressione ad eccezione dell'ultimo, sono tutti antecedenti, la somma degli antecedenti può venire espressa per $s-u$; e così per somigliante maniera essendo i termini d' una progressione tutti conseguenti all' infuori del primo, la somma dei conseguenti si può rappresentare per $s-a$. Ma in una serie di ragioni eguali, e per conseguenza in qualsisia progression geometrica, la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come ciascun antecedente al suo conseguente, perciò se ne avrà

$$s-u : s-a :: a : aq;$$

di quì, fatto il prodotto degli estremi e de' medj si ricava

$$\overline{s-u} \times aq = \overline{s-a} \times a,$$

che, operando la moltiplicazione, dà

$$saq - uaq = sa - a^2;$$

e quindi, riducendo in uno stesso membro tutti i termini in cui entra la s, avremo

$$saq - sa = uaq - a^2;$$

e per essere $saq - sa = \overline{aq-a} \times s$;

perciò, sostituito che si abbia questo valore al primo nell' ultima equazione, sarà ancora

$$\overline{aq-a} \times s = uaq - a^2;$$

ora, tolto all' incognita s il suo coefficiente $aq-a$, si avrà

$$s = \frac{uaq - a^2}{aq - a};$$

di quì, dividendo il numeratore e denominatore del secondo membro di questa equazione per a, ne otterremo

$$s = \frac{(uaq - a^2) : a}{(aq - a) : a} = \frac{uq - a}{q - 1};$$

dunque $$s = \frac{uq - a}{q - 1}$$

sarà l' espressione della somma cercata. Quindi si raccoglie che la somma di tutti e quanti i termini di una progressione geometrica equivale al prodotto dell' ultimo termine pel quoziente, meno il primo termine; il tutto diviso pel quoziente scemato dell' *unità*.

Le equazioni

$$u = aq^{n-1} \text{ ed } s = \frac{aq-a}{q-1}$$

servono di per se sole alla risoluzione dei problemi che si possono proporre intorno alle progressioni geometriche. E per vero in esse equazioni si racchiudono tutte le quantità che soglionsi considerare nelle progressioni geometriche, cioè a dire a, u, q, n, s, che significano il *primo*, e *l'ultimo termine*, il *quoziente* il *numero dei termini* e la *somma*. Laonde ove si conoscano tre di sì fatte quantità e l' altre due sieno incognite, se ne potrà formare due equazioni mercè cui conoscere i valori delle incognite.

Fermati questi principj è da farsi a risolvere qualche problema.

§, 106. Prob. 1.° « Si cerca d'inserire fra 2 e 2048 nove medj proporzionali per tal maniera che se ne formi una progressione geometrica «.

A primo tratto si scorge che la progressione ricercata ha da essere composta di 11 termini, il primo de' quali è 2, e l'ultimo si è 2048. Ond' è che per essa si avrà $n=11$, $a=2$, $u=2048$. Per istabilire il secondo termine e gli altri successivi fa mestieri conoscer prima il quoziente di essa progressione. A tal effetto

prendasi l' equazione $u=aq^{n-1}$, ed in vece di a, u, n vi si ponga il loro proprio valore e n'otterremo

$$2048 = 2 \times q^{10}, \text{ ossia } q^{10} = \frac{2048}{2} = 1024$$

e quindi $\quad q = \sqrt[10]{1024} = 2$ (*)

Perciò il quoziente è 2. Ora a fine di comporre i medj, di cui si domanda, non si ha che ad operare una continuata moltiplicazione del primo termine pel quoziente, e ne verrà la progressione

$$\div\!\div\ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256$$
$$: 512 : 1024 : 2048.$$

Prob. 2.° « Uno prende a coltivare un paese incolto. Il primo anno vi semina uno stajo di grano e ne raccoglie 3 staja; il secondo anno

(*) Noi abbiamo tralasciato di assegnare il metodo per estrarre la radice decima d' un numero; ma è di questa come della radice quadrata o della cubica: la radice quadrata non deve avere che una sola cifra qualvolta il numero proposto non ne ha più di due: la cubica non ha da avere più d' una cifra il il numero proposto non ne ha che tre; similmente la radice decima d' un numero non avrà che una sola cifra, finchè il numero proposto non ne avrà più di 10; lo stesso dicasi delle altre radici, la trentesima, ad esempio, sarà da una sola cifra, se il numero proposto non avrà più di 30 cifre: ciò si dimostra nella stessa maniera che si é praticato per la radice quadrata.

Nel caso nostro, ad avere la radice decima di 1024 basterà pur estrarre la radice quadrata di 1024, e quindi, poiché tal radice 32 è quinta potenza della radice in questione, si estragga da essa radice venuta la radice quinta (V. §. 112.), e si avrà 2 che sarà ancora la radice decima di 1024.

accrescendo la coltura vi semina le 3 staja e ne raccoglie 9. Continua così per 9 anni seminando tutto quanto il raccolto e ricavandone sempre il triplo del seminato. Domandasi quanto grano egli abbia raccolto al nono anno. «

Egli è chiaro che qui si ha una progressione, di cui il primo termine $a=1$, il quoziente $q=3$ ed il numero n dei termini è 9 e si vuol ritrovare l' ultimo termine. Però usando la formola

$$u=aq^{n-1},$$

si avrà $\quad u=1\times3^{9-1}=6561.$

Quindi al nono anno il grano raccolto ascenderà a 6561 stajo.

Prob. 3.° « Un giocatore che si conosce perdente, a vedere se può rifarsi, raddoppia sempre la sua posta e perde dieci volte l' una dopo l' altra senza interruzione; la prima volta pose al gioco solo che tre lire; quante n' ha perdute alla decima? e qual ne fu la perdita totale? «

La questione si riduce a trovare l' ultimo termine d' una progressione, il cui primo termine $a=3$, il quoziente $q=2$ e il numero de' termini $n=10$. Quindi prendasi la formola

$$u=aq^{n-1},$$

e si otterrà $\quad u=3\times2^{10-1},\ u=3\times512=1536.$

Ed è però che l' ultima perdita sarà di lire

1536. Si verifica un tal risultato formando tutta intera la progressione

$$\div\div\ 3 : 3\times2 : 3\times4 : 3\times8 : \text{ecc.} \ldots :$$
$$3\times512=1536.$$

Ponendo poi il valore di u nella equazione

$$s=\frac{qu-a}{q-1}$$

se ne ricaverà $\quad s=\frac{2\times1536-3}{2-1}=3069;$

perciò l' intera perdita ascenderà a lire 3069.

Prob. 4.° « Da una botte si è tratto del vino per ben cinque volte e a mano a mano sempre in quantità maggiore e precisamente secondo la progressione geometrica, il cui ultimo termine è 243; (e siano per es. 243 fiaschi) ed il quoziente si è 3: ora si cerca quanti fiaschi ne furono cavati la prima volta e nell'altre successive. «

Per fine di risolvere un siffatto problema è mestieri prima conoscere il valore di a nell' equazione

$$u=aq^{n-1}.$$

A tal effetto non si ha che a trasformare l' equazione

$$u=aq^{n-1} \text{ in } aq^{n-1}=u$$

e quindi si avrà tosto

$$a=\frac{u}{q^{n-1}}:$$

Ora in questa formola a luogo di u, q, n si pongano i valori, e ne verrà

$$a=\frac{243}{3^5-1}=\frac{243}{3^4}=\frac{243}{81}=3\,;$$

Ciò è a dire che la prima volta si cavarono fuori tre fiaschi di vino, e però la seconda ne furono cavati $3\times3=9$, la terza $9\times3=27$, la quarta $27\times3=81$, e quindi la quinta $81\times3=243$.

Prob. 5.° « Mentre l'indice dei secondi in un orologio percorre lo spazio di 60 minuti, l'indice che segua i minuti s'innoltra di 1; in tanto che il primo descrive quest' uno, il secondo s'avanza di $\frac{1}{60}$; nel tempo che quello trascorre $\frac{1}{60}$ questo lo precede di $\frac{1}{3600}$ e va dicendo. Quindi si pare aversi a dedurre che l' uno s' accosti bensì all' altro sempre maggiormente, ma che nol possa mai raggiugnere. Or come succede che lo raggiungne non pure, ma lo trapassa ancora in brevissimo tempo? «

A prima giunta è manifesto che l' indice maggiore avrà raggiunto il minore quando avrà percorsa una lunghezza corrispondente alla somma dei termini della progressione geometrica

$$\div\div\; 60 : 1 : \tfrac{1}{60} : \tfrac{1}{3600} : \text{ecc.}$$

Ora in questa progressione presa al rovescio l'ultimo termine sarà $=60$, e il primo sarà $=0$ (V. la nota al §. 107.); il quoziente poi è $=60$.

Il perchè se nella formola

$$s=\frac{qu-a}{q-1}$$

vengono sostituiti ad u, a, e q i loro proprj valori si avrà

$$s=\frac{60\times60-0}{60-1}\,;$$

e quindi $$s=\frac{3600}{59}=61\,\tfrac{1}{59}.$$

perciò coll' intervallo di 61 minuti ed $\frac{1}{59}$ il primo indice avrà raggiunto l' altro e subito dopo gli correrà innanzi.

Prob. 6.° « Il corriere A parte da un luogo facendo ogni giorno non si sa quante miglia. Un altro corriere B partito il giorno appresso dal medesimo luogo gli tien dietro, e dopo miglia 121 il raggiunge. Avendo fatto il primo giorno 1 miglio, il secondo tre miglia, e così via via sempre in progressione geometrica tanto che all' ultimo giorno venne a percorrere 81 miglia. Ora si vuol sapere dopo quanti giorni il corriere A sia stato raggiunto da B, e qual viaggio egli abbia fatto ad ogni giorno.«

Per conoscere dopo quanti giorni il corriere B raggiugnesse il primo A sarà bastevole il formare effettivamente la progressione geometrica che si ha per la condizione del problema; il numero de' suoi termini esprimerà i giorni di che si richiede. Essendo 3 il quoziente di tal progressione; 1 il primo, e 81 l'ultimo de' suoi termini ne avremo

$$\div\div 1 : 3 : 9 : 27 : 81$$

e perciò è a dire che dopo corsi 3 giorni il corriere *B* raggiunse *A*.

A rispondere all'altra domanda che si faceva, pongasi mente che *A* essendo partito un giorno innanzi avrà perciò fatto 6 giorni di cammino; e perchè fu raggiunto dopo miglia 121 non s'ha che a dividere un tal numero per 6, e si trova che ad ogni giorno egli percorse miglia $20\frac{1}{6}$.

Prob. 7.° « Uno scialaquatore in cinque anni ha dato fondo a tutto quanto il suo avere accrescendo per ogni anno quattro volte più la spesa che in prima fu di 300 franchi; si vuol sapere qual fosse l'intero patrimonio di lui. «

Per tal questione, chi ben considera, non si cerca altro che la somma di una progressione, di cui il primo termine $a=300$, quoziente $q=4$, e il numero dei termini $n=5$. A tal fine è da usare primamente la formola $u=q^{n-1}$ per conoscere il valore di u. Però, fatte le debite sostituzioni si avrà

$$u=300\times4^{5-1}=300\times256=76800.$$

Ora nella formola $s=\frac{qu-a}{q-1}$ posti a luogo di q, u, a i valori che lor si convengono, ne verrà

$$s=\frac{4\times76800-300}{4-1}=\frac{306900}{3}=102300.$$

perciò è a dire che il suddetto avesse di sua facoltà 102300 franchi.

§. 107. Or qui non riuscirà inutilmente il far avvertenza che le frazioni periodiche decimali di cui si parla in Aritmetica si possono risguardare siccome tante progressioni geometriche decrescenti, i cui termini vanno all'infinito.

Così ad es. la frazione periodica 0, 242424 ec. è un medesimo con la progressione

$$\div\div \frac{24}{100} : \frac{24}{10000} : \frac{24}{1000000} \text{ ecc.}$$

ovvero
$$\frac{24}{10^2} : \frac{24}{10^4} : \frac{24}{10^6} \text{ ecc.}$$

Ove una tal frazione si volesse trasformare in una frazione ordinaria è da tenere la via seguente. In prima: acciocchè il calcolo riesca men arduo, si legga la progressione al rovescio così come la fosse crescente. Quindi si avrà l'ultimo termine $=\frac{24}{100}$; ed il primo deve farsi $=0$ (*); il quoziente poi sarà $=100$. Prendasi la formola

$$s=\frac{qu-a}{q-1}$$

(*) Le progressioni geometriche qualora si concepiscano prolungate all'infinito, il termine infinitesimo sarà più piccolo d'una qualunque quantità immaginabile, e perciò senza rischio notabile di errore si può prendere la cifra 0 per ultimo termine di tali progressioni.

e ad a, u, q vi si sostituiscano i corrispondenti valori, ne otterremo

$$s=\frac{100\times\frac{24}{100}-0}{100-1}=\frac{24}{99};$$

si cerchi il maggior commun divisore di 24 e di 99, e fatta per esso, cioè per 3 la divisione di tutti e due i termini si troverà

$$\frac{24}{99}=\frac{8}{33};$$

valore della data frazione periodica; e a verificarlo basterà pur fare la divisione di 8 per 33, che quindi ne verrà la frazione periodica.

Il fin quì operato vale a confermare la regola che si assegna in Aritmetica, e che si concepisce in questa forma; *per avere la frazione ordinaria da cui deriva una frazion periodica decimale, si pone a numeratore le cifre di un solo periodo, e a denominatore altrettante cifre 9, quante sono le cifre di che il periodo è composto.*

N. B. Accade talora che date tre delle cinque suddette quantità, nel ricercare le altre due si viene ad equazioni superiori al secondo grado, per le cui risoluzioni son necessarii de' metodi che non possono aver luogo nella brevità di questo trattato.

CAPO DECIMO.

Dei logaritmi.

§. 108. I logaritmi, la cui invenzione è dovuta al gran Nèper Barone di Scozia, si prestano assaissimo per la maggiore speditezza del calcolo; e le quistioni più intrigate ricevono per essi una facile soluzione. Il perchè stimo opportuno il darne almeno un qualche cenno.

Sotto nome di *logaritmi* s'intendono gli esponenti che si vogliono apporre ad una quantità invariabile per quindi formare di sì varie potenze da dedurne ogni numero possibile.

A ben dichiarare una tal definizione sia a un numero *costante*; gli esponenti, a cui si avrà da innalzare a perchè riesca eguale ad altri numeri formeranno i logaritmi di essi numeri. Quindi se $a^m=b$ sarà m il logaritmo di b; se $a^n=c$, si avrà n per logaritmo di c, ecc. Ond' è che fatto $a=10$, poichè $10^2=100$, sarà 2 il logaritmo di 100: e così per essere $10^3=1000$, ne verrà 3 per logaritmo di 1000 e così via via.

Il numero costante a dicesi *base* dei logaritmi.

Per dinotare il logaritmo d' una qualsivoglia quantità si usa mettervi innanzi il segno *log.*; ond' è che $log.m$ esprime il logaritmo di m.

§. 109. Qualesisia numero può servire di *base*, non però l' unità, perchè dato che a

fosse $=1$, a qualunque potenza venisse innalzata la base 1, essa non diverrebbe mai uguale ad alcun numero che non fosse l'unità.

Un complesso di logaritmi formati sopra una qualche base chiamasi *un sistema logaritmico*. V'ha molti sistemi di logaritmi diversi l'un dall' altro secondo la diversità delle basi sopra cui sono fondati.

Il sistema più commune, e perciò denominato *ordinario*, ha per sua base il 10. Siccome a^1 è mai sempre $=a$, e così $a^0=1$, quindi è che in ogni qualunque sistema, il logaritmo della base è pur sempre l'unità ed il logaritmo dell'unità è costantemente lo *zero*.

§. 110. Ove si prenda il 10 siccome base, si avrà di primo tratto

$$10^0=1\,;\ 10^1=10\,;\ 10^2=100\,;\ 10^3=1000,\ \text{ecc.}$$

e perciò sarà $0=\log. 1\,;\ 1=\log. 10\,;$

$2=\log. 100\,;\ 3=\log. 1000$ ecc.

Dal che manifesto appare che *le potenze esatte della base hanno per logaritmi dei numeri interi e positivi*.

I logaritmi poi delle frazioni che hanno l'unità a numeratore e per denominatore le potenze intere della base sono i numeri interi ma negativi: e nel vero per essere (V. la nota al §. 24).

$$\tfrac{1}{10}=10^{-1}\,;\ \tfrac{1}{100}=10^{-2}\,;\ \tfrac{1}{1000}=10^{-3}\,;$$

si avrà $-1=\log. \frac{1}{10}\,;\ -2=\log. \frac{1}{100}\,;$

$-3=\log. \frac{1}{1000}$ ecc.

Quanto poi spetta ai logaritmi di tutti gli altri numeri interi che stanno di mezzo fra 1 e 10, tra 10 e 100, tra 100 e 1000 ecc. non si potranno avere che per approssimazione.

Onde meglio ciò si possa comprendere, produciamo un qualche esempio. Si cerchi il logaritmo di 2. Sopposto che un tal logaritmo sia x, se ne avrà $2=10^x$. A primo tratto si scorge che x non può venire espresso dall'unità, nè tampoco da un numero maggiore dell'unità; perocchè $10^1=10$, che è ben cinque volte maggiore del 2. Sarà egli forse uguale a qualcuna frazione? A parlare in tutto rigore nè anche per una frazione si può esprimere questo logaritmo, perchè 10 con esponente frazionario è quantità incommensurabile, nè quindi il 2 può giammai essere uguale ad essa. Pur nullameno riesce possibile trovare una frazione, onde rappresentare il valore di x di guisa, che 10^x diventi vieppiù prossimamente eguale al 2.

Non si rende malagevole il persuadersi che x vuol essere minore di $\frac{1}{2}$, perocchè il quadrato di $10^{\frac{1}{2}}$ è uguale a 10, laddove il 2 non ha che 4 per suo quadrato. Così del pari, dato che $\frac{1}{3}$ forse il valore di x ne riuscirebbe ancora 10^x maggiore di 2.

E nel vero il cubo di $10^{\frac{1}{3}}$ si è 10, ed il cubo di 2 è solamente 8. Per opposto; ove x si facesse $=\frac{1}{4}$, un tal valore sarebbe troppo piccolo perchè $10^{\frac{1}{4}}$ si avesse a prendere per logaritmo del 2.

Di fatti è visibile, che essendo 10 la quarta potenza di $10^{\frac{1}{4}}$, e 16 quella di 2, per necessità $10^{\frac{1}{4}}$ ha da essere minore del 2.

Quindi è palese che x, cioè log. 2 è meno di $\frac{1}{3}$ e maggiore di $\frac{1}{4}$. Adoperando in tal forma si può esperimentare una qualunque frazione compresa tra $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ e vedere se è maggiore o minore del vero valore di x. Facciamone la prova con $\frac{2}{7}$ che è una frazione minore di $\frac{1}{3}$ e maggiore di $\frac{1}{4}$; a tal effetto si converrebbe che 10^x cioè a dire $10^{\frac{2}{7}}$ fosse $=2$, e che perciò la settima potenza di $10^{\frac{2}{7}}$ eguagliasse la 7ª potenza di 2; ma $\left(10^{\frac{2}{7}}\right)^7=100$, e $2^7=128$.

Quindi è che $\frac{2}{7}$ non è una frazione che data per esponente al 10 se ne possa ricavare il 2; dunque log. 2 è maggiore di $\frac{2}{7}$ così come è minore di $\frac{1}{3}$. Tentando una qualche altra frazione che sta di mezzo tra $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{7}$ per es. $\frac{3}{10}$ si ritroverà che log. 2 è di mezzo a $\frac{3}{10}$ e $\frac{1}{3}$, ossia, ridotte le frazioni a uno stesso denominatore, tra $\frac{9}{30}$ e $\frac{10}{30}$; esso è maggiore di $\frac{9}{30}$ e minore di $\frac{10}{30}$. Per tal modo accrescendo ognor più l'una e così diminuendo l'altra di tali due frazioni di mezzo a cui si trova il valore di x, (e ciò sino a tanto che la differenza loro sia poco notabile, e da non tenerne calcolo); allora si potrà prendere una di esse frazioni (ridotta in *decimali*) pel vero logaritmo di 2.

In così fatta guisa si può trovare di tali frazioni che date per esponente al 10 formino una potenza d'un valore prossimo, il più che si vuole, ad un qualunque numero intero, ed in allora le dette frazioni saranno il logaritmo di quel tal numero. Ma, a dir vero, non è questa la diritta maniera, secondo cui furono trovati i logaritmi; ben altre teoriche s'immaginarono, le quali perchè richieggono profonda scienza di calcolo, non possono aver qui luogo.

§. 111. E perchè zero è il logaritmo dell'unità, i numeri compresi tra 1 e 10 avranno per logaritmo *zero* con una frazion decimale che ne esprimerà il valore tanto più esattamente quanto maggiore sarà il numero delle sue cifre.

Il logaritmo di 10 è 1, e 2 quello di 100; onde segue che ai numeri posti fra 10, e 100 corrispondono i logaritmi composti di 1 e di qualcuna frazion decimale.

E per la stessa ragione i numeri posti fra 100 e 1000 avranno per logaritmo il numero intero 2 oltre a una frazion decimale, e così via discorrendo per gli altri. Per tutto questo ognun può assai di lieve comprendere che i logaritmi dei numeri composti di 1, 2, 3, 4.... cifre hanno per parte intera 0, 1, 2, 3... $n-1$, ciò è a dire sempre un'unità di meno del numero delle cifre.

E di qui è che alla suddetta parte intera, la quale per così dire porge il carattere, onde conoscere di quante cifre sia composto il numero che vi corrisponde, si è dato il nome di *caratteristica*.

E così alla frazion decimale che aggiunta alla parte intera compone il logaritmo, fu imposto il nome latino di *mantissa* che val lo stesso che aggiunta.

Laonde se un numero per mo' d' esempio avrà 3 per caratteristica, si saprà che esso appartiene alle migliaja; imperocchè il loga-

ritmo di 1000 è 3: e quello di 10000 essendo 4, qualunque numero tra 1000 e 10000, non potrà avere per logaritmo salvo che 3 e una qualche frazione decimale.

§. 112. Veniamo ora a toccare le principali proprietà dei logaritmi. Sia a la base dei logaritmi, e si abbia

$$b=a^m\,,\quad c=a^n\,,$$

sarà $m=\log. b$, $n=\log. c$ (§. 108)

Moltiplicando l'una per l'altra le due prime equazioni ne risulta

$$bc=a^{m+n}\,,$$

e perciò $m+n=\log. bc.$

Ora facendo l'addizione dell'altre due equazioni si ottiene

$$m+n=\log. b+\log. c.$$

Dunque $\log. bc=\log. b+\log. c$; e per conseguente *il logaritmo d'un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei numeri, da cui esso è formato.*

Così ad avere il logaritmo di 6 non si ha che a fare la somma dei logaritmi di 2 e 3.

Parimente; ove si dividano le due prime equazioni

$$b = a^m, \quad c = a^n$$

ne verrà $\frac{b}{c} = a^{m-n}$;

e però $m - n = \log. \frac{b}{c}$.

ma, sottratte che siano l'una dall' altra, le due equazioni

$$m = \log. b, \text{ ed } n = \log. c,$$

si ricava $m - n = \log. b - \log. c$.

Quindi è che $\log. \frac{b}{c} = \log. b - \log. c$;

ciò val quanto dire: *il logaritmo d' un quoziente eguaglia la differenza che si ha sottraendo il logaritmo del divisore da quello del dividendo.*

Laonde ad avere il logaritmo di 5 non si ha che a sottrarre il logaritmo di 2 dal logaritmo di 10.

Nota. Da quanto sopra si rileva che il logartimo di $\frac{3}{4}$ è $= \log. 3 - \log. 4$, e così del pari che il log. di $\frac{5}{7}$ si è $= \log. 5 - \log. 7$ ecc; però è a conchiudere che i logaritmi delle frazioni vere o come diconsi *genuine* sono mai sempre negativi; imperocchè sottraendo il logaritmo del denominatore da quello del numeratore non si può avere altro residuo che negativo.

§. 113. Dato che a sia la base dei logaritmi e fatto $b = a^m$, sarà $m = \log. b$. Ciò posto, innalzando i due membri della prima equazione alla potenza n si ha $b^n = a^{mn}$, e però

$$mn = \log. b^n.$$

Che se in vece l' altra equazione $m = \log. b$, si moltiplichi per n, ne risulta

$$mn = n \log. b.$$

Pertanto $\log. b^n = n \log. b$; il che è a dire; *il logaritmo di una potenza equivale al logaritmo della quantità semplice moltiplicato pel grado della potenza.*

Quindi si ha il logaritmo di 9 ove si prenda due volte il logaritmo di 3.

E per converso; se dalla prima equazione $b = a^m$ si estragga la radice *ennesima* ne risulta

$$\sqrt[n]{b} = a^{\frac{m}{n}},$$

e perciò $\frac{m}{n} = \log. \sqrt[n]{b}$.

Ma, divisa per n l' altra equazione

$$m = \log. b$$

ne viene $\frac{m}{n} = \frac{\log. b}{n}$.

Dunque $\log. \sqrt[n]{b} = \frac{\log. b}{n}$;

Cioè a dire che *il logaritmo di una radice eguaglia il logaritmo della quantità sotto il radicale diviso per il grado della radice.*

Ond'è che il logaritmo di 4 è la terza parte del logaritmo di 64.

§. 114. Le proprietà finora discorse intorno ai logaritmi hanno segnato la via per formare le così dette *tavole logaritmiche.* Opera la si fu questa d'immensa fatica e lungo studio per coloro che primi si fecero a calcolarle. Altri metodi ben più facili per riuscire a un tale scopo non si trovarono se non dopo assai tempo che esse tavole eran formate. Ciò basti aver toccato così di volo, che il farne discorso per opera, ne obbligherebbe ad allungarci oltre il dovere.

Bensì, perchè altri si possa formare una qualche idea del come sieno fatte queste tavole stimiam bene il porre sott' occhio la seguente :

TAVOLA DEI LOGARITMI

dei numeri naturali da **1** *sino a* **120**.

Num.	Logaritmi	Num.	Logaritmi	Num.	Logaritmi	Num.	Logaritmi
0	. . . . .	30	1,477121	60	1,778151	90	1,954243
1	0,000000	31	1,491362	61	1,785330	91	1:959041
2	0,301030	32	1,505150	62	1,792392	92	1,963788
3	0,477121	33	1,518514	63	1,799341	93	1,968483
4	0,602060	34	1,531479	64	1,806180	94	1,973128
5	0,698970	35	1,544068	65	1,812913	95	1,977724
6	0,778151	36	1,556303	66	1,819544	96	1,982271
7	0,845098	37	1,568202	67	1,826075	97	1,986772
8	0,903090	38	1,579784	68	1.832509	98	1,991226
9	0,954243	39	1,591065	69	1,838849	99	1,998635
10	1,000000	40	1,602060	70	1,845098	100	2,000000
11	1,041393	41	1,612784	71	1,851258	101	2,004321
12	1,079181	42	1,623249	72	1,857332	102	2,008600
13	1,113943	43	1,633468	73	1,863323	103	2,012837
14	1,146128	44	1,643453	74	1,869232	104	2,017033
15	1,176091	45	1,653213	75	1,875061	105	2,021189
16	1,204120	46	1,662758	76	1,880814	106	2,025306
17	1,230449	47	1,672098	77	1,886491	107	2,029384
18	1,255273	48	1,681241	78	1,892095	108	2,033424
19	1,278754	49	1,690196	79	1,897627	109	2,037426
20	1,301030	50	1,698970	80	1,903090	110	2,041393
21	1,322219	51	1,707570	81	1,908485	111	2,045323
22	1,342423	52	1,716003	82	1,913814	112	2,049218
23	1,361728	53	1,724276	83	1,919078	113	2,052078
24	1,380211	54	1,732394	84	1,924279	114	2.056905
25	1,397940	55	1,740363	85	1,929419	115	2,060698
26	1,414973	56	1,748188	86	1,934498	116	2,064458
27	1,431364	57	1,755875	87	1,939519	117	2,068186
28	1,447158	58	1,763428	88	1,944483	118	2,071882
29	1,462398	59	1,770852	89	1,949390	119	2,075547
30	1,477121	60	1,778151	89	1,954243	120	2,079181

§. 115. Per quanto si è detto sopra i logaritmi agevolmente si comprende il gran vantaggio che se ne ricava per la brevità del calcolo.

In effetto; mercè di essi la moltiplicazione e divisione dei numeri si riduce a pura somma e sottrazione, e così del pari l' alzamento d' un numero a una qualche potenza, ovvero l' estrazione d' alcuna sua radice si può effettuare con solo la moltiplicazione e divisione. A maggior schiarimento veniamo agli esempi.

In prima è da vedere come si voglia eseguire la moltiplicazione per logaritmi. Siano a e b due numeri de' quali si cerchi il prodotto e sarà

$$\log. ab = \log. a + \log. b.$$

A tal effetto sono a cercare nelle tavole i logaritmi di a e b, e quindi farne la somma. Ciò premesso è da trovare nelle tavole stesse il logaritmo uguale alla somma venuta, ed il numero che gli corrisponde sarà uguale al prodotto ab.

Supponiamo ad esempio $a=8$ e $b=6$. Trovato che il logaritmo di 8 è . . 0,903090
è quello di 6 è . . . . . : . 0,778151

donde risulta la somma . . . 1,681241.

Ora si cerchi nelle tavole un tal nuovo logaritmo, e il numero 48 che gli corrisponde si è effettivamente il prodotto cercato.

Di qui ne viene chiara la regola generale; *ad operare una moltiplicazione per logaritmi conviene aggiugnere l' uno all' altro i logaritmi dei due fattori, e la somma sarà il logaritmo del prodotto; poscia non si vuol far più che trovare un tal logaritmo nelle tavole e vedere il correlativo numero che sarà il prodotto, di cui si cerca.*

Medesimamente se avremo a dividere a per b, sarà $\log. \frac{a}{b} = \log. a - \log. b$; trovati che sieno nelle tavole i logaritmi di a e b, e fatto che se ne abbia la sottrazione, si cerchi in una tavola il logaritmo della loro differenza ed il numero corrispondente sarà il quoziente domandato.

Sia $a=56$ e $b=7$, e troveremo nelle tavole
il logaritmo di $56=$. 1,748188
e il logaritmo di $7=$. 0,845098

la cui differenza = . 0,903090.

Ora si ricerchi nella tavola un sì fatto logaritmo, il numero 8, che vi si trova accanto è il quoziente di che si faceva domanda.

Quindi *a fine di trovare il quoziente di un numero per un altro è solo uopo sottrarre il logaritmo del divisore da quello del dividendo, cercar poscia nelle tavole a qual numero corrisponda il logaritmo del residuo e questo numero sarà il quoziente che si vuole.*

La ragione di una tal regola è fondata sopra ciò, che dovendo il quoziente moltiplicato pel divisore riprodurre il dividendo, il logaritmo del quoto aggiunto al logaritmo del divisore (§. 112) dovrà formare il logaritmo del dividendo, e per conseguente il logaritmo del quoziente eguaglierà il logaritmo del dividendo meno quello del divisore.

§. 116. Vogliasi ora formare la potenza n d' un numero a. Di qui (§. 113) si ricava log. $a^n = n$ log. a. Ora è da trovare nelle tavole il logaritmo di a e poscia farne la moltiplicazione per n. Indi si cerchi il logaritmo eguale ad un tal prodotto, e il numero che vi corrisponde sarà $= a^n$.

Facciamo supposto che a sia $=2$, ed $n=6$, ed avremo log. $2 = 0{,}301030$, e per conseguenza $6 \times$ log. $2 = 1{,}806180$, il cui numero corrispondente è 64. E nel vero ove si formi per effetto la sesta potenza di 2, si troverà essere 64.

Di qui ne deriva la regola generale che così si esprime; *a fine di elevare un numero ad una qualunque potenza vuolsi prendere il suo logaritmo le tante volte quante sono le unità nel grado della potenza; il numero che corrisponde al logaritmo di un così fatto prodotto esprimerà la potenza che si vuole.*

E così per opposto; ove si volesse estrarre dal numero a una radice del grado n si avrà

$$\text{log. } \sqrt[n]{a} = \frac{\text{log. } a}{n}.$$

Perciò si divida per n il logaritmo di a e fatta ricerca nella tavola del logaritmo uguale al quoziente di tal divisione, il numero che vi corrisponde sarà $=$ log. $\sqrt[n]{a}$.

Abbiasi da estrarre la radice quinta di 32, e si avrà $a=32$ ed $n=5$; quindi

$$\text{log. } 1{,}505150 : 5 = \text{log. } 0{,}301030.$$

Si cerci ora nella tavola il numero, a cui un tal logaritmo s' appartiene, e si vedrà essere il 2, che è appunto la radice domandata.

Per tanto si conchiuda che *ad avere una qualunque radice d' un numero è solo mestieri dividere il logaritmo di esso numero pel grado della radice; la radice che si richiede verrà espressa pel numero a cui si riferisce il logaritmo d' un tal quoziente.*

Nota. Si osservi che ogni qualvolta si cerca, nelle tavole ordinarie un logaritmo che risulti da alcune operazioni sopra altri logaritmi, se trovasi che l' ultima cifra di questo logaritmo, e quello della tavola, non differisce che d' una unità, una tal differenza si vuol riguardare siccome nulla; perchè in generale, e fatte le dovute eccezioni che abbiam detto, i logaritmi de' numeri interi non si possono avere che per approssimazione.

§. 116. Da ciò che è detto si conosce facilmente che per operare la regola *del tre* non occorre altro uopo che di aggiugnere l' uno all' altro i logaritmi dei medj, e poscia sottrarre da una tal somma l' un estremo, ed il residuo esprimerà l' altro dei termini estremi. Di qui si vede pure la maniera di trovare l' un medio data che sia la somma dei logaritmi dei termini estremi. Per modo d'esempio; vogliasi l' uno estremo della proporzione

$$2 : 12 :: 5 : x.$$

Fatta la somma dei logaritmi di 12 e 5 si avrà 1,778151; sottraendo da essa 0,602060, logaritmo di 4, se ne ha in residuo 1,176091, logaritmo del numero 15, che effettivamente si è il termine ricercato.

Molte cose rimarebbero ancora a dirsi intorno ai logaritmi, ma al nostro scopo è più che bastevole quel tanto che ne fu discorso.

INDICE.

Nozioni preliminari . . . . Pag. 1

Capo I. *Dei segni e delle espressioni algebriche* . . . . . . » 5

— II. *Delle operazioni aritmetiche sopra le espressioni dell' Algebra*

Somma . . . . » 10

Sottrazione . . . . . . » 11

Moltiplicazione . . . . » 13

Divisione . . . . . . » 17

— III. *Delle equazioni del primo grado* » 26

— IV. *Delle potenze e delle radici* » 43

— V. *Estrazione della radice quadrata dei numeri* . . . . . . » 52

— VI. *Delle equazioni di secondo grado* » 61

— VII. *Delle ragioni e proporzioni aritmetiche e geometriche* . » 69

— VIII. *Delle progressioni aritmetiche* » 93

— IX. *Delle progressioni geometriche* » 105

— X. *Dei Logaritmi* . . . . . » 121