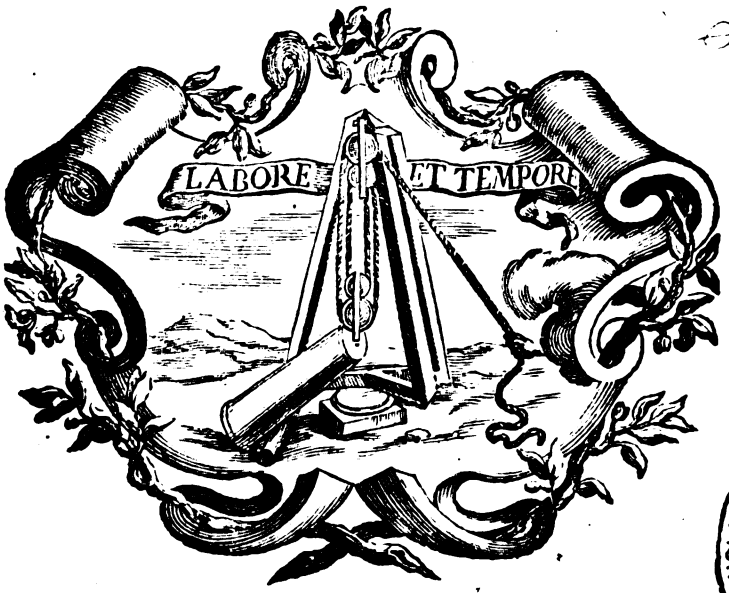
IOANNIS POLENI
In Gymnasio Patavino Matheseos Prof.; Petropolitani Prof. Honorarii; & Scient. Societatum Regiarum, quæ Londini & Berolini sunt, Sodalis

EPISTOLARVM MATHEMATICARVM FASCICVLVS.



PATAVII. CIↃIↃCCXXVIIII.
Superiorum Permissu.

Illustrissimis atque Excellentissimis Viris

REI LITTERARIAE MODERATORIBVS

IO. FRANCISCO MAVROCENO
Equiti,

ANDREAE SVPERANTIO
AEdis D. Marci Procuratori,

PETRO GRIMANO
Equiti & AEdis D. Marci Procuratori,

TOTIQVE IIIVIRVM LITTERARIORVM

ORDINI AMPLISSIMO

Ioannes Polenus F.

QVAS partim hoc anno, partim superioribus, Epistolas edidi ad Mathematicam rem pertinentes, in unum fasciculum collectas, Vobis offerre in animo erat, Viri Amplissimi. Dolebat quidem, non esse ex genere illarum, quæ, ut singula exigui momenti sint, in

unum coalescentes, corpus efficiant, quod stare possit robore, & dignitate sua. Videbam enim; & tenues esse sejunctas, &, si conjungerentur, corpus formaturas tum exile, tum nulla habiturum ornamenta, nisi quæ a Nominibus vestris longe splendidissimis accederent. Confidebam tamen interdum, futurum ut, pro incredibili illa vestra humanitate, non quid afferrem attenderetis potius, quam quo animo quave voluntate. Hæc cogitatione versabam ante aliquot menses: at nunc instans novi anni initium animos addit; videturque, mihi quodammodo potestatem ex veteri instituto præbere, fasciculum hunc, tamquam strenam, Vobis sine ulla hæsitatione exhibendi. Itaque id & facio; & cum facio, vota quoque pro vestra incolumitate, atque felicitate talia suscipio, qualia pro beneficentissimis, & de se optime meritis Patronis cliens grato animo concipere maxime potest.

Patavio. Pridie Kal. Ianuarias. CIↃIↃCCXXVIIII.

INDEX EPISTOLARUM.

NOI

NOI RIFFORMATORI

dello Studio di Padova.

AVendo veduto per la Fede di revisione, ed Approvazione del *P. F. Gio. Pellegrino Galassi Inquisitore di Padova*, nel Libro intitolato: *Ioannis Poleni in Gymnasio Patavino Matheseos Prof.* &c. *Epistolarum Mathematicarum Fasciculus*; non v' esser cos' alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per Attestato del Segretario Nostro; niente contro Prencipi, e buoni costumi, concediamo Licenza a *Giovanni Manfrè Stampatore*, che possi esser stampato, osservando gl' ordini in materia di Stampe, e presentando le solite copie alle Pubbliche Librerie di Venezia, e di Padova.

Dat. 27. Dicembre 1729.

(Gio: Francesco Morosini Cav. Ref.
(Andrea Soranzo Proc. Ref.
(Pietro Grimani Cav. Proc. Ref.

Agostino Gadaldini Segret.

IOANNIS POLENI

A D

GABRIELEM MANFREDIVM

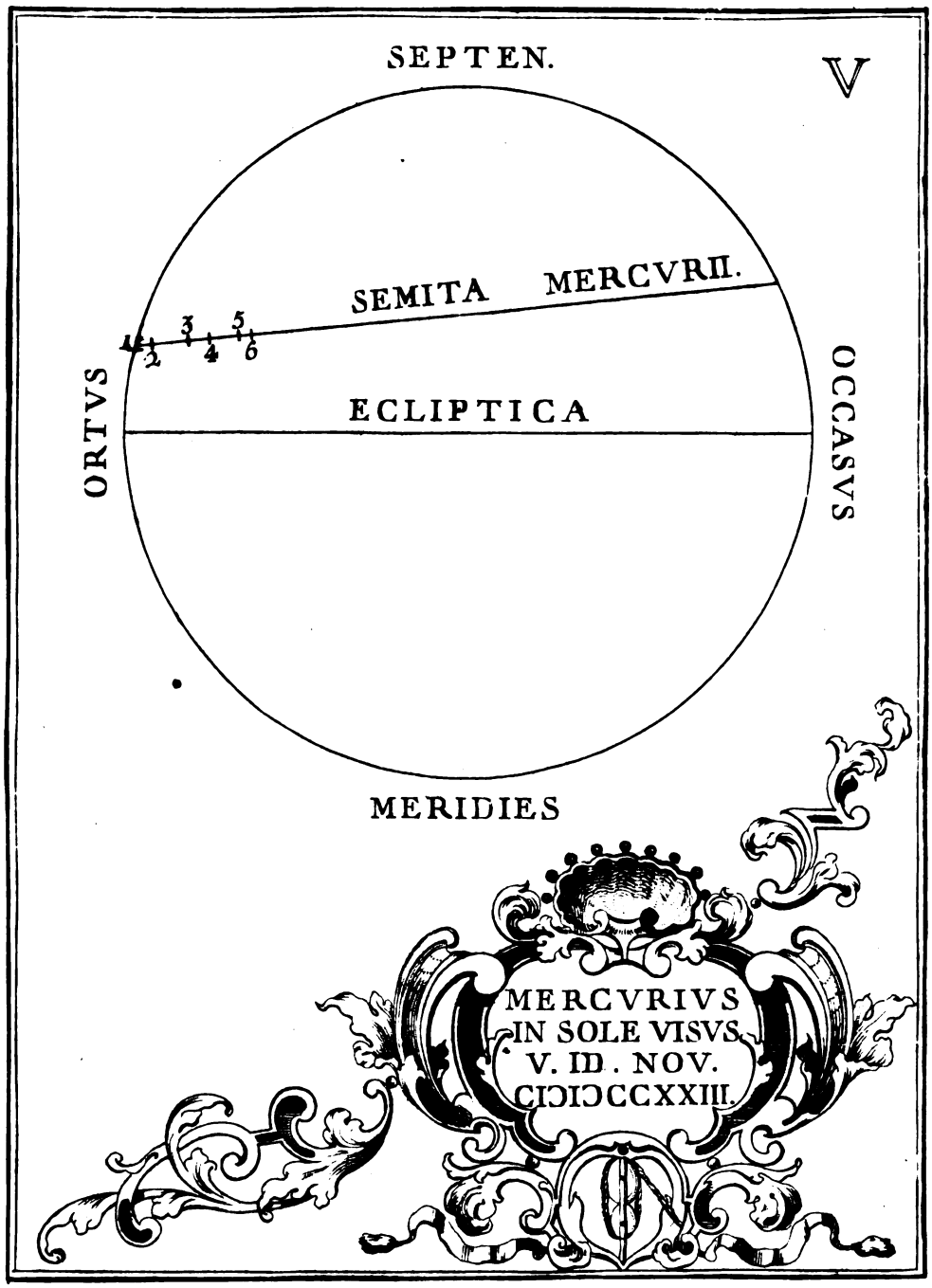
Amplissimo Bononiensi Senatui

A Secretis,

Itemque Bononiensi in Gymnasio Doctrinæ Analyticæ Professorem eximium

EPISTOLAE DVAE.

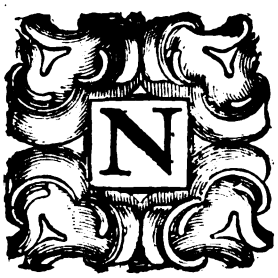
In quarum altera agitur de Mercurio in Sole viso, Anno CIↃIↃCCXXIII; in altera vero de invenienda ratione inter duas indeterminatas quantitates in nonnullis Algebraicis AEquationibus.



VIRO CELEBERRIMO

GABRIELI MANFREDIO

Ioannes Polenus S. P. D.



ON Te fugit, Manfredi Doctissime, Eclipticas Stellæ Mercurii cum Sole conjunctiones magnos usus afferre posse ad eam Astronomiæ partem, quæ in illius Planetæ contemplatione versatur, perficiendam. Sero autem cum cœpta sint observari hujusmodi phœnomena, & cum raro iisdem locis spectanda se præbeant, perpaucæ hactenus eorundem observationes in Astronomorum Commentaria referri potuere. Igitur ab aliquo tempore concipiebam animo, futuras Astronomiæ perutiles observationes Mercurii inter Solem Telluremque transituri V. Idus Nov. atque mecum reputabam e re astronomica futurum, si eundem transitum observarent non modo Viri cælestium observationum Peritissimi, verum etiam ii, qui possent id mediocri tantum ratione præstare; ut, si forte nubium injuria illis phænomenum obtegeretur,

his vero faveret Cælum, mediocris potius induſtriæ obſervationes, quam nullæ haberentur: neque illud me præteribat, vel poſtremi hujuſce generis obſervationes cum aliis collatas præbere aliquando utilitates haud contemnendas. Itaque propter has poſteriores cauſſas, & tunc obſervare inſtitui, & nunc edo quæ obſervavi: edo autem ſtatim, proſequens exemplum Doctorum Hominum, qui ſæpe res hujuſmodi publici juris facere ſolent, antequam novitatis gratiam exuant.

2 Cum primum Solem inſpexi (erat autem is dies III. Kal. Oct. hora 3.) mature comparaturus ea, quæ ad propoſitam obſervationem pertinerent, maculam in Sole mediocris magnitudinis inveni, quæ ab ejus limbo diſtare videbatur tantillo minus quarta parte ſolaris diametri, atque attingere inferiore ſui parte rectam lineam per Solis centrum ductam ad angulos rectos cum Verticali. Deinceps interdum negotia, alias nubes impedimento fuere, quin diligentiorem obſervationem captare poſſem. Kal. tamen Novembris, hora 22 cum dimidia per dehiſcentes nubes eam iterum vidi, a limbo diſtantem tanto ferme intervallo, quanta fuerat ipſius diameter in priore obſervatione: ſed figuræ exilioris & longiuſculæ, quod magnam partem contigiſſe reor ob oculum quaſi in plano ipſius maculæ collocatum.

3 Sed ut pergam ad obſervationem Mercurii, quam habui diviſis officiis una cum amiciſſimo utriuſque noſtrum Viro, Ioanne Baptiſta Morgagno in hoc Gymnaſio Primæ Sedis Anatomico Cel. ad hanc uſus ſum tubo optico longo Pedes Regios Pariſienſes VIIII. vitris optimæ notæ inſtructo; per quem tranſeuntes Solis radios excipiebam adverſa charta adfixa aſſerculo, quattuor ligneis ſcindulis trabeculæ ſecundum longitudinem fulcienti tubum ea ratione

aptato,

aptato, ut eosdem omnino, ac tubus, motus haberet. Nolo autem longus esse enarrando partes alias, quas omnes parandas curaveram ad artis præcepta; id unum adjiciam, me adhibuisse machinam rotulis, & trochleis instructam, qua nullo negotio ita movetur tubus, ut Solis imago (hæc in charta diametrum pollicum decem Regii Parisiensis Pedis obtinebat) intra eundem circulum possit & jugiter, & commode detineri.

4 Hisce itaque instrumentis, Cælo prorsus sudo, plures habitæ sunt Stellæ peragrantis discum Solis observationes. En eas, quæ adpositis numeris etiam in Figura indicantur.

Observationes.	*Tempus Apparens.* H.	*I*	*II*	*Distantiæ Mercurii a limbo orientali Solaris disci in partibus millesimis diametri disci, sumtæ in Semita.*
1	3.	29.	54.	0.
2		38.	47.	25.
3		54.	55.	82.
4	4.	2.	47.	107.
5		19.	12.	150.
6		28.	32.	173.

5 Antequam autem in Figuram referrem visi Planetæ loca, angulos Eclipticæ cum tribus Verticalibus circulis supputavi: & inveni tempore secundæ observationis angulum fuisse graduum 71. 4, quartæ graduum 68. 43. postremæ graduum 66. 21. Pro duabus intermediis partes conveniente proportione assumpsi. Alias etiam cum tramite Mercurii, ducto per quinque illa puncta 2. 3. 4. 5. 6. (sed in majore illo adhibito,

bito, tempore obſervationum, circulo, quo in ſingulis ſupputationibus uſus ſum) quaſi ſponte ad rectam lineam accommodata, alias, inquam, obſervationes contuli, quæ ipſius tramitis poſitionem ſtabilire viſæ ſunt. Ceterum, humiliore Sole, puta cum inſtaret tempus, quo ipſius imago elliptica fieri incipit, nimiarum refractionum metu obſervationes neglexi.

6 Quod vero ad ingreſſum attinet Mercurii in Solem, is neque citius, neque diſtinctius poterat in charta obſervari (per longiorem enim tubum oculos in Solem intendere, ſubdolumque Planetam expectare, fateor, nolui) at locus ipſius ingreſſus fuit tantillo depreſſior, quam reliquæ ſemitæ poſitioni conveniret. Num vero id contigerit primæ illius obſervationis vitio aliquo, an ex phyſica aliqua cauſſa, conjiciam cum videro aliorum obſervationes; cum accepero ea, quæ obſervaviſſe non dubito, modo Cælum faverit, Doctiſſimum Fratrem tuum Germanum, hujuſmodi rerum Peritiſſimum: qui forte etiam Cometam nuper viſum eſt contemplatus. Illud autem adjiciam; figuram ingredientis Mercurii, diligenter a nobis obſervatam, apparuiſſe quidem in charta non circularem (qualis non multo poſt, neglectis ſpuriis coloribus, videbatur Stellæ ſpecies) ſed oblongam gracillimamque. Haud obſimilis figuræ etiam a Godofredo Kirchio in obſervatione habita anno 1690 mentio fit.

7 Iam vero ad indagandum Mercurii exitum tranſeo. Diviſa ipſius Mercurii ſemita in partes 400, portio peragrata tempore obſervationis, nimirum minutorum 58. 38, reperitur partium 72: hinc inita ratione inveniemus, ſecundum datos illos numeros, totam ſemitam horis 5. minutis 25. 44. Mercurium peragraviſſe: ejuſque a Sole exitum ad horam octavam

&

& minuta 55. 38. ſecundum initam rationem, eſſe referendum.

8 Nunc illud reliquum eſt, ut de Angulo inclinationis Orbitæ Mercurii ad Eclipticam, ac de magnitudine ſpeciei Stellæ aliquid adjiciam. Angulus ille viſus mihi eſt, repetitis menſuris, graduum ſex, quibus vix unius aut alterius ſecundi additio fieri poſſet. Magnitudinem exploravimus comparando maculam (ut ita dicam) Mercurialem cum variis variarum magnitudinum nigris circularibus notulis in charta ſignatis; ex quibus, quæ æqualis eſt viſa, ſelegimus. Hujus autem diameter, non uno modo cum partibus minuti primi ex circulo maximo deſumti collata, inventa fuit, vix aut ne vix quidem ſecundorum decem magnitudinem exequare.

Hæc de nuperrima Mercurii cum Sole conjunctione habui, quæ curſim ad Te ſcriberem, Manfredi Ornatiſſime, cum anguſtiis temporis urgerer, meiſque inſuper publicis occupationibus diſtinerer. Tu, ut cetera, quæ a me ſunt, pro tua ſingulari humanitate boni conſulas. Vale.

Patavii. III. Id. Novemb. CIↃIↃCCXXIII.

Quod, niſi hac oblata occaſione, fortaſſe non eram facturus, hic edam alteram quandam meam ad eundem Ornatiſſimum Manfredum Epiſtolam.

VIRO CELEBERRIMO
GABRIELI MANFREDO

Ioannes Polenus S. P. D.

CVM ante aliquot menses haberem in manibus utilissimum illud Problema, quo rationem tradis sejungendi in nonnullis Algebricis æquationibus indeterminatas quantitates; venit ex ea re mihi in mentem fieri fortasse posse, ut in illis iisdem æquationibus, aliisque ad genus idem pertinentibus, ratio inter duas indeterminatas haud inutiliter quæreretur. Sed variis tunc implicatus occupationibus, quæ animo adverteram, re persequi minime potui: nunc aliquid otii nactus, res nonnullas paullo diligentius expendi; quæ vero problemata iisdem rebus basi veluti fuere ac fundamento, mitto ad Te, Ornatissime Manfredi, ut cujus scripta hanc speciem mihi excitavere, ejus humanitas æqui bonique consulat hæc, qualiacumque sint. De rebus autem ipsis erit alias dicendi locus: si aliquid utilitatis ex principiis hisce haberi posse, sive usu majore, sive aliunde certius comperiam.

2 Primum itaque regulam proponam ad constantem vestigandam rationem inter indeterminatas, sive coordinatas x & y in cunctis differentialibus gradus primi æquationibus; in quarum termino quolibet, si dimensiones indeterminatarum x & y in unam colligantur summam, idem omnino numerus procreatur. Idque præstabo posito exemplo, cum vel in hoc regula ipsa satis possit perspicue apparere.

Etsi

Etsi vero propria ejusdem regulæ demonstratio ab ipso quoque exemplo quodammodo designetur: adjiciam tamen specimen quoddam demonstrationis diversi generis; quandoquidem adjungam exempla derivata aliis ex regulis, quibus ad conclusionem eandem illam, inventam in exemplo superiore, perducemur. Quod eo præsertim consilio faciam, ut regulas alias aliis rebus haud levi usui (ut opinor) futuras subindicem, cum ita ferat occasio.

3 Data modo sit (caussa exempli) æquatio hæc $bx^5dx - cy^3x^2dx = gy^5dy$; ponaturque $y = ax$; unde habebuntur, $y^3 = a^3x^3$, & $gy^5dy = ga^6x^5dx$; atque, peractis substitutionibus, prima illa æquatio transformabitur in hanc $bx^5dx - ca^3x^5dx = ga^6x^5dx$. Deinde suffecto y pro ax in termino ga^6x^5dx, singulisque terminis per ga^5x^4dx divisis, prodibit $bx : ga^5 - cx : ga^2 = y$. Quamobrem, ubi fiat æquatio (B) $b : ga^5 - c : ga^2 = a$, habebitur $ax = y$; quemadmodum principio ponebatur. Itaque, si adhibita æquatione (B) inveniatur valor ipsius a (quod in proposito exemplo facillimum factu est) hic valor, loco a surrogatus, rationi inter x & y exhibendæ plane inserviet.

4 Vsi autem consulto fuimus æquatione ex tribus dumtaxat terminis composita, ut facilitati consuleremus. Ceterum universalis regula est, quocumque tandem terminorum numero data constet æquatio.

5 Quod si in exhibita trium terminorum æquatione, alterutrius indeterminatæ dimensiones arbitrario exponente contineantur; cujus exponentis determinatione fieri queat, ut in terminis singulis indeterminatæ eam habeant dimensionum æqualitatem, quam supra posuimus; erit certe vel in hisce circumstantiis priori regulæ locus. Vt pergam uti exemplis, sit æquatio (G) $x^p dx + y^r x^q dx = dy$; in qua pro q quæ-

quælibet quantitas possit surrogari. Scribatur $ex^g = y$; unde haberi poterunt, $e^r x^{gr} = y^r$, & $gex^{g-1}dx = dy$: itaque pro y^r & dy, respondentibus quantitatibus suffectis, proveniet nova æquatio $x^p dx + e^r x^{gr+q} dx = gex^{g-1} dx$. Si conferantur deinde inter se indeterminatæ exponentes p, $gr + q$, $g - 1$, ut fiant æquales; prodit $g = p + 1$; (quamobrem æquatio $ex^g = y$ fit $ex^{p+1} = y$) prætereaque invenitur $q = -pr + p - r$: & substitutis exponentium g & q valoribus habetur nova æquatio hæc $x^p dx + e^r x^p dx = gex^p dx$. Surrogandoque, in postremo termino, y pro quantitate ex^{p+1}, ac dividendo per $gx^{-1}dx$ constituitur æquatio $x^{p+1} : g + x^{p+1} e^r : g = y$; sive $x^{p+1} : (p + 1) + x^{p+1} e^r : (p + 1) = y$. Quapropter si nunc fiat $(e^r + 1) : (p + 1) = e$ resultabit eadem illa, quæ resultare debebat, æquatio $ex^{p+1} = y$; nimirum $ex^g = y$.

6 Sed his subjiciamus exemplum alterius regulæ, quæ ad ipsam modo propositam solutionem adducit. Fingamus in eadem æquatione (G) $x^p dx + y^r x^q dx = dy$, terminum $y^r x^q dx = e^r x^p dx$: dividendoque per $x^q dx$ fiet $y^r = e^r x^{p-q}$; & extrahendo radicem r prodibit (A) $y = ex^{(p-q):r}$. Ac quoniam $e^r x^p dx = y^r x^q dx$, erit $(e^r + 1) x^p dx = x^p dx + y^r x^q dx$; indeque in æquatione (G) peracta substitutione cum habebitur $(e^r + 1) x^p dx = dy$; tum post integrationem æquatio (B) $(e^r + 1) x^{p+1} : (p + 1) = y$. Jam si conferantur æquationes (A)(B) prodibit $ex^{(p-q):r} = (e + 1) x^{p+1} : (p + 1)$ atque exponentibus inter se collatis, invenietur denuo $q = p - pr - r$: ita prodibit $ex^{p+1} = (e^r + 1) x^{p+1} : (p + 1)$ iterumque apparebit fieri oportere ut sit $(e^r + 1) : (p + 1) = e$, quemadmodum vel in articulo superiore apparuerat.

7 Vlterius vero aliam hanc operationem adjicere lubet. Ponatur æquatio (B) $ex^g - y = 0$; quadrando habebitur $eex^{2g} - 2eyx^g + yy = 0$; atque sumendo dif-

differentias (suffectis $2yy$ loco terminorum $eex^{2g} + yy$, qui duo termini sunt inter se æquales) prodibit (A) $-2egyx^{g-1}dx - 2ex^g dy + 4ydy = 0$. Ope autem æquationis (B) cum inveniantur $egx^{g-1}dx = dy$, & $e^{r+1}x^{gr+g} = y^{r+1}$, in secundo termino respondentibus valoribus positis fiet $-2egyx^{g-1}dx - 2e^{-r+1}gy^{r+1}x^{-gr+g-1}dx + 4ydy = 0$, & dividendo per $4y$, ac mutatis signis, $egx^{g-1}dx : 2 + e^{-r+1}gy^r x^{-gr+g-1}dx : 2 = dy$; & ponendo $eg : 2 = b$; & $e^{-r+1}g : 2 = c$, & $g - 1 = p$, & $-gr + g - 1 = q$, fiet (G) $bx^p dx + cy^r x^q dx = dy$. Nunc autem, si fingamus rationem illam inter x & y in æquatione (B) constitutam ignorari; ubi eam in æquatione (G) secundum regulam primi exempli vestigantes, ponamus (C) $ax^m = y$, unde $max^{m-1}dx = dy$, & $a^r x^{mr} = y^r$, substitutionibus peractis, perveniemus ad æquationem hanc $bx^p dx + ca^r x^{mr+q}dx = max^{m-1}dx$; in qua fient exponentes $m = p + 1$ (quamobrem liquere poterit esse $m = g$) & $q = p - pr - r$. Itaque convenientibus adhibitis exponentibus, & posita in postremo termino indeterminata y, subtractoque ejus valore, fiet $bx^{g-1}dx + ca^r x^{g-1}dx = gyx^{-1}dx$; & dividendo per $gx^{-1}dx$, surrogandoque exponentem m pro g, habebitur $bx^m : g + ca^r x^m : g = y$ quare, si fiat (D) $b : g + ca^r : g = a$, progignetur æquatio (C) $ax^m = y$, quæ in exordio hujusce vestigationis posita fuerat. Demum, si in æquatione (D) substituantur valores datarum b & c, pervenietur ad æquationem $e^r + a^r = 2ae^{r-1}$; ex qua patebit esse $e = a$. Ita æquatio illa (C) fiet hæc $ex^m = y$; sive (g pro m restituendo) $ex^g = y$; hæcque est certa illa æquatio (B) principio constituta, indicans ex indeterminatarum rationibus eam; quam perducere facile posse ad curvam parabolici generis, satis est manifestum; & quam inter easdem indeterminatas in expensa modo æquatione (G) intercedere necessario opor-

oportere, nota jam ante æquationis natura atque conſtitutio aperte demonſtrat.

8 Quæ ſane conſtituendarum æquationum regula ad res quaſdam alias neque injucundas, neque (ſi quid judico) inutiles patefacit aditum. Non modo enim ad quærendas rationes illas, quas profecto unas hoc ſcripto attendi, ſed ad alias curvas modis aliis reperiendas poſſe aliquando convenire, perſpicue apparet. Porro, quemadmodum in Algebra, ut appellant, Carteſiana Florimondus de Beaune, & Eraſmus Bartholinus multa egregia præſtitere „ naturam & conſtitutionem æquationum ex ea„ rum generatione & comparatione cum ſimilibus „ ſeu ejuſdem formæ „ veſtigantes; ita quoque fieri poſſe videtur (immo in nonnullis æquationibus experiundo effeci) ut, conveniente adhibita methodo, natura & conſtitutio plurium differentialium æquationum innoteſcat. Illud quidem ingenti eſſe commodo opinor, nimirum poſſe adſignari integralia quorundam ex illis terminis, in quibus utraque indeterminata cum ſit, alius tamen reſpondens terminus deſideratur. Vt in æquatione (A) Art. 7. cum ſit, cauſa exempli, $2egyx^{e-1}dx + 2ex^{e}dy = 4ex^{e}dy$, alicui ſi inveſtigationi conducat ſolum hunc terminum $4ex^{e}dy$ relinquere, hujus nihilominus integratio poterit facile obtineri. Vnde etiam ad veſtigandam ſimilium terminorum naturam novus aditus aperitur. Poſſem alia adjicere de prima regula, de ejus uſu in conſtructione æquationum, de coefficientibus quantitatibus, variiſque earundem radicibus. Sed hæc jam nimis longa: Tu pro eximia doctrina tua, num revera alicujus momenti ſint cognoſcere optime potes. Vale.

Patavii. Idibus Septemb. CIↃIↃCCXXIII.

IOANNIS POLENI

AD

IO. IACOBVM MARINONIVM

S. M. C. C.

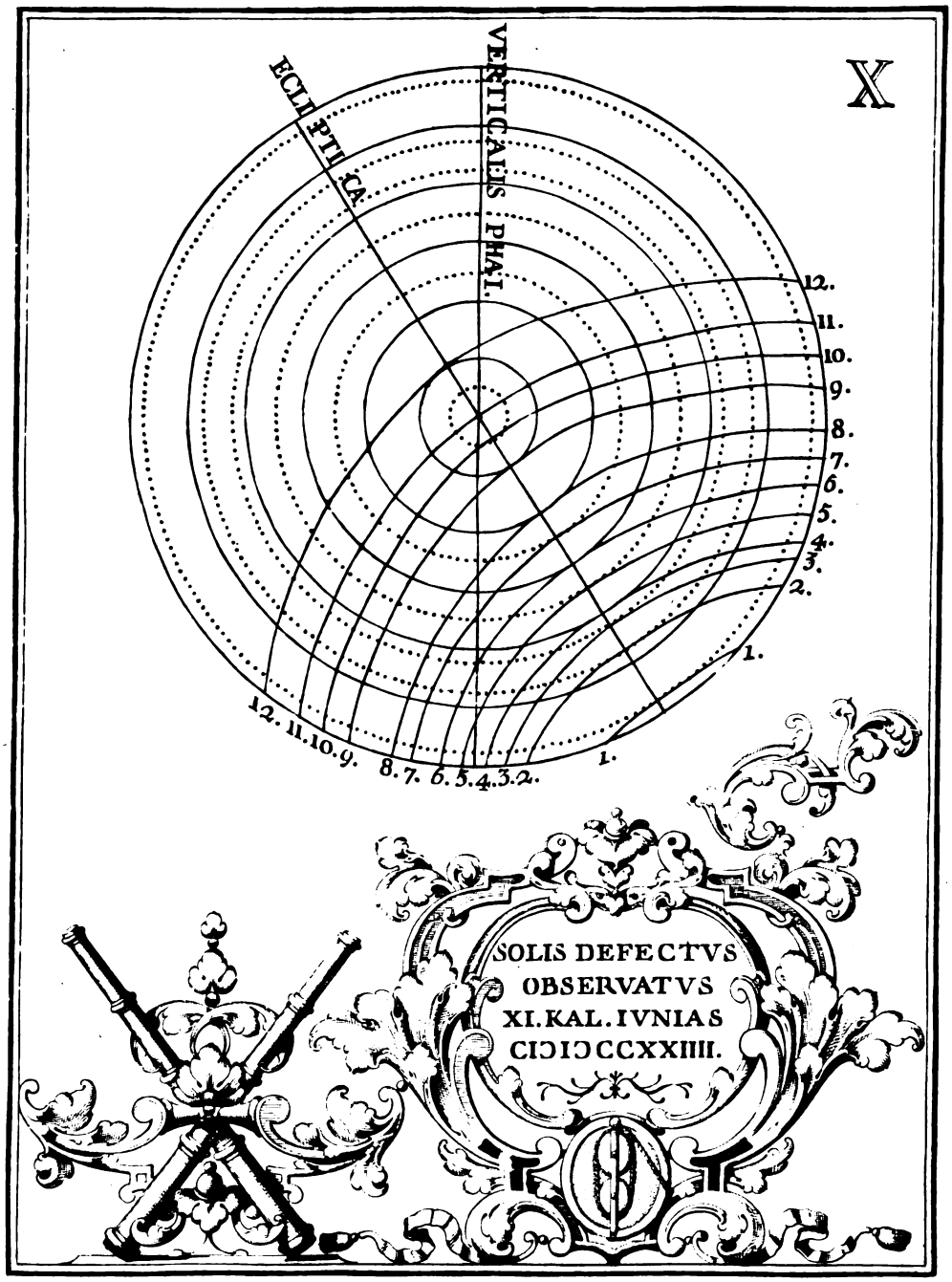
Inclytorumque Statuum Inferioris Auſtriæ
Mathematicum Præſtantiſſimum

E P I S T O L A.

In qua agitur de Solis Defectu anno CIↃIↃCCXXIIII.
Patavii obſervato; & de aliquibus Experimentis
pertinentibus ad Aquas Fluentes. Accedit

IOANNIS BVTEONIS

De Fluentis Aquæ Menſura Libellus, cui
Annotationes nonnullæ ſubjiciuntur.



VIRO PRAESTANTISSIMO

IO. IACOBO MARINONIO.

Ioannes Polenus S. P. D.

QVAS non ita pridem Solis deficientis Phases, divisis officiis cum Cel. amicissimoque Viro Io. Baptista Morgagno (aderant etiam nonnulli alii Docti Viri) observavi, in apposita Figura, subjectaque Tabella, Tibi exhibeo, Marinoni Ornatissime.

Phases Observata.	*Digiti Obscurationum.*		*Temp.* H.	*Appar.* I	II
1.		1:4.	6.	37.	58.
2.	1.	1:4.		42.	23.
3.	1.	3:4.		43.	26.
4.	2.			43.	40.
5.	2.	2:4.		45.	32.
6.	3.			47.	
7.	3.	2:4.		49.	11.
8.	4.			51.	9.
9.	5.			54.	35.
10.	5.	2:4.		56.	6.
11.	6.			58.	4.
12.	7.		7.	1.	32.

De Figura id unum habeo quod ſcribam; linearum, repræſentantium Eclipticam atque Verticalem circulum, angulum eſſe graduum 33. 54: hujuſce nimirum magnitudinis, adhibito primæ Phaſis tempore, ſubductis calculis prodiit. De Obſervatione autem ipſa, hæc habeto.

Vſus ſum tubo optico longo Pedes Pariſienſes XV. trans quem Solis imago, cujus diameter Pedis circiter unius cum dimidio, ſuper albam tabellam, pluribus (ut fieri conſuevit) circellis diſtinctam, in cubiculo tenebricoſo depingebatur. Defectus initium haudquaquam fuit obſervatum. Vix autem tribus poſt horam ſeptimam ſexageſimis temporis converſis, nubes impedivere obſervationem; citius deinde, quam in patente Finitore contigiſſet, Sole poſt Euganeos Colles occidente.

Quoniam vero, ut alias animadverteramus, obſcurationes aeris futuræ eſſe videbantur minores iis, quæ partibus Solis obtectis pro rata portione conveniſſent, ego atque modo laudatus Morgagnus una incubuimus in id diligenter, ut unius ejuſdemque Hominis, extra cubiculum tenebricoſum pone feneſtram, quæ erat contra occidentem Solem, poſiti (& ante Defectus initium, & ſurrepto varias inter Phaſes tempore) pupillarum magnitudinem exploraremus. Eas autem creſcente obſcuritate diduci facile animadvertimus: diduci tamen partibus paucis ita, ut plane concluſerimus, pupillarum quidem diductionem inter cauſſas phænomeni propoſiti numerari oportere; ſed alicui etiam alii, vel aliquibus aliis cauſſis, præter hanc, locum eſſe relinquendum: atque etiam fortaſſe illi, quam, agens de Deliquio Solis ante novem annos obſervato, tradideram. Cujus obſervationis occaſione Philippus a Turre Præſul, dum viveret, longe

Do-

Doctissimus, pupillarum diductionem in phænomeni caussa esse posse demonstraverat. Porro de rebus illis ex verbis ipsis, quibus litteris fuere mandatæ, judicium fieri velim: quod innuisse satis sit.

Redeo ad Solis Defectum; propterea quod prætermittere minime debeo, Sole infra nubium, Euganeorum Collium, & Finitoris terminos demerso, cum oculorum pupillas iterum spectaremus, visuri quantæ essent eo lumine, celerrime advenisse obscuritatem ingentem, quam (fateor) haudquaquam expectabam; quando rationes, quas inieram, mihi suaserant faciendum esse cum iis, qui putabant, Solem hic non esse omni ex parte defecturum. Apparuere autem Stellæ (Veneris Stella, quoniam in majori etiam lumine observari potuisset, itemque Mercurii Stella, quoniam vix per dehiscentes nubes se prodidit, numerandæ non videntur) apparuere, inquam, Stellæ plures; atque, ut Senecæ verbis utar, non expectata nocte fulserunt; in eo præsertim Cæli tractu, qui inter æstivum Occasum, Cælique verticem patet; neque enim reliquæ Cæli plagæ adeo erant obscuræ. Sed post unam aut alteram sexagesimam horæ partem novum affulsit lumen, quod Cæli deinde faciem quam cito talem reddidit, qualis ei tempori convenisset, vel si Solis radii, nulla ex parte coerciti, fovere (ut ita dicam) crepusculum liberrime potuissent.

Hactenus de Solis Defectu. At lubet nonnulla experimenta iisdem ferme diebus, quibus Deliquium illud observavi, instituta subjicere. De quibus antequam dico, quæ occasio eorundem habendorum fuerit, exponere necesse est. Allata ad me fuerant eo tempore tria illa Volumina, Italica lingua scripta, anno edita superiore, quibus titulus est; *Raccolta d' Autori che trattano del moto dell' acque*. Hæc cum ver-

versarem, forte incidi in quendam locum (Vol. II. pag. 511.) ubi a Viro Celeberrimo P. Abbate Guidone Grando verba fiunt de ea fluentis aquæ proprietate, quam ut explicem, subjiciam Theorema a Celeberrimis Viris Io. Bernoullio, & Iac. Hermanno in Actis Eruditorum anni 1716 propositum; quod hujusmodi est; „ Aqua per foramina minora ex Vasis „ erumpit æquali celeritate, quam gutta aquæ acqui„ rere potest descensu accelerato per altitudinem pa„ rem illi, quam aqua habet supra foramen. „ Affirmat autem Doctissimus Abbas; videri, ab experimentis demonstrari, celeritatem aquæ reapse ex foraminibus effluentis valde esse minorem ea, quam modo allatum Theorema constituit. Tribuitque plurimum Mariotti placito ex ejusdem Tractatu de Aquarum Motu, Par. III. Differt. II. desumto; quo loco narrat Mariottus, ex accuratissimis pluribus experimentis sibi constare, ex foramine rotundo, cujus diameter linearum trium, ubi ejus centrum tredecim pedibus sit infra superficiem superiorem aquæ, in lato tubo stagnantis, effluere temporis (ut loquuntur) minuto, 14 aquæ mensuras ejus generis, ut earundem 35 cubicum pedem exæquent (eas autem 14 mensuras pollicibus cubicis 691 ferme æquales invenio) Hoc itaque posito Mariotti placito concludit laudatus Auctor, aquam minuto temporis ex proposito foramine rotundo fluentem, deformatam in cylindrum, cujus basis illud idem foramen, extensum iri in longitudinem pedum 1148, atque hujusmodi esse videri illius aquæ velocitatem. Hanc autem esse minorem ea velocitate, quam grave corpus adipisceretur, de altitudine pedum dumtaxat duodecim decidens: quandoquidem adepta hac velocitate corpus illud, temporis minuto, percurreret pedes 1440; decidens vero de alti-

altitudine pedum tredecim, pedes circiter 1493 peragraret. Quod postquam ita constituit; aliis, ait, se relinquere difficultatis hujusce solutionem; atque hanc ad absolutiorem inducendam perfectionem huic Scientiæ conducturam, asseverat.

Mihi vero hæc legenti non potuere non recurrere in mentem quæ de hisce iisdem rebus olim scripseram. In Libro enim meo de Castellis edito anno 1718 (pag. 64: in qua versu 24 & 26 pro „ lineas „ pollices, & versu 27 pro „ linearum „ pollicum esse legendum; attendenti superiores versus multo erit evidentius, quam ut indicari debeat) scripseram; me, habita etiam contractionis aquæ ratione, haudquaquam invenisse consensum inter experimenta, atque superius allatum Theorema. Ac statueram, aquæ ex vasorum foraminibus effluentis velocitatem, in experimentis observatam, valde esse minorem: atque ideo de hisce rebus amplius esse quærendum. At post editum Librum, pluribus experimentis ad calculos rationesque revocatis (ante enim expenderam pauca) attentisque iis, quæ ad rem strictius pertinent, placitum illud meum mollire debui, ac ferme mutare; proptereaquod experimenta posterius expensa docuere, velocitatem, haud valde minorem, sæpe reperiri: atque ita in eam ivi sententiam, ut crederem, contra allatum Theorema haudquaquam facere experimenta. Novaque mea sententia hæc in Ephemeridibus Eruditorum Italiæ (pag. 9.) pertinentibus ad annum 1718, editis autem anno 1719, ut declararetur curavi.

Porro ut hæc, quasi secundis curis, ad examen revocarem, in manus resumsi adversaria mea, in quæ experimenta illa, aliaque posterius habita regesseram. Hæc cum suis momentis expenderem,

phæ-

phænomena quædam diligentius accuratiusque attendebam: quorum occasione, nonnulla, quæ me legisse memineram, Theoremata menti obversabantur. Vt vero Phænomenorum eorundem caussas assequi ego non poteram; ita facile neque percipiebam, neque percipi posse videbatur, qua ratione Theoremata illa, stantibus iisdem experimentis, recipi queant, quove modo queat deprehendi eorundem cum veritate consensus. At nunc in re proposita standum est: ad quam rectius faciliusque tractandam id conducibile futurum existimavi, si Mariotti experimento experimenta alia similia, altitudine aquæ & luminum magnitudine, tentarentur.

Itaque tubum faciendum curavi amplum, pro re instituenda, longum Pedes Regios Parisienses (his in metiendo semper utor) quattuordecim, in amplius vas desinentem: tubique parieti Lamellas, tubulosque deinde aptavi ad eam altitudinem, ut luminum centra pedibus tredecim essent infra summam aquæ superficiem. Erat autem paries tubi eo locò tenuior factus: sed non abutar patientia tua, Vir Doctissime, in describenda opera & diligentia, quam in experiundo visus mihi sum collocasse. Tantum adjiciam quæ scitu necessaria esse arbitror; nimirum: me tubulorum & foraminum (quacumque figura prædita sint) per quæ e vase effluit aqua, sectiones cavitati minimæ eorundem convenientes, luminum vocabulo nuncupaturum: foraminum tubulorumque, in experimentis adhibitorum, cuncta lumina habuisse figuram circuli facti diametro linearum trium, atque ideo fuisse inter se prorsus æqualia: me adhibuisse, ad excipiendam effluentem aquam, vas angusti oris capax pollicum aquæ cubicorum 2520: mihi rationes subducenti visum plane esse, cubum deformatum in

cylin-

cylindrum, cujus basis circulus factus diametro linearum trium, extensum iri in longitudinem pedum 2933: me habita ratione totius temporis, quo vas implebatur, quantum aquæ quovis minuto effluxerit adnotavisse: demum singula, quæ mox narrabuntur, experimenta me haud semel instituisse; atque, si uno aut duobus minutis secundis differre inter se varia tentamina aliquando visum est, vel numerum intermedium, vel consentientes fuisse receptos.

Primum (ex iis, quæ nunc referre in animo est) experimentum habui foramine rotundo in tenui ferrea bractea insculpto: tempore autem unius minuti pollices aquæ cubici 607 emanavere.

Secundum institutum fuit rotundo foramine, diametro jam constituta linearum trium, in lamella ex orichalco, crassitiei pauxillo excedentis quartam lineæ partem: hujus autem crassitiei pars dimidia in foramine intacta erat; dimidia vero altera pars deraso, ut ita dicam, angulo figuram superficiei frusti coni rectanguli (cujus basis radius æqualis altitudini ipsius coni) obtinebat. Cum ita posita esset lamella, ut pars illa intacta tubi cavitati responderet; tempore unius minuti effluxerunt pollices aquæ cubici 627.

Tertium experimentum habui eadem lamella, sed contrario modo posita, ut ejus superficies, qua parte ora foraminis erat intacta, exterius foret. Tempore autem unius minuti, pollices aquæ cubicos 713 fluxisse, observatum est.

Quartum ut facerem experimentum, adhibui tubulum cylindracea cavitate præditum, longum lineas tredecim. Pollices aquæ cubici 809, tempore unius minuti, exiere.

Quinto in experimento usus sum tubulo eodem, quo usus fueram in quarto: sed prius duabus lineis

eum decurtandum curaveram, ejusque orificium alterum sic introrsum limandum, ut referret frusti superficiei coni figuram similem illi, quam lamellæ, ut dictum est, induxeramus. Cum per hoc orificium aqua tubulum influebat, erumpebant uno temporis minuto pollices aquæ cubici 889.

Sextum quoque institutum fuit eodem illo tubulo, sed iterum decurtato lineis quattuor, atque ideo septem lineas haudquaquam excedente. Cum pariter aqua orificio limato exciperetur, cubici aquæ pollices 905, intra unius minuti spatium, effluxerunt.

Narratis hisce experimentis; ante omnia rem proponam, quam etiam in Libro de Castellis indicavi, & quam animadvertere (si quid judico) maxime præstat: nimirum; ut definiatur quantum aquæ dato tempore, ex dato foramine aut tubo effluere queat, non modo altitudinem aquæ, pressura sua fluxum progignentis, esse attendendam; verum etiam, determinato foraminis aut tubi lumine, per quod aqua fluit, constitui diligentissime oportere quæ & quanta sit foraminis aut tubi figura reliqua: cum in allatis experimentis propter horum figuras varias, varias quoque aquæ quantitates per lumina æqualia prodiisse, Solis luce clarius esse videatur.

Nunc, si conferamus tertium nostrum experimentum cum illo Mariotti, videbimus duo hæc inter se valde consentire: cum in nostro, tempore unius minuti, effluxerint pollices aquæ cubici 713, in eo Mariotti 691. Quamobrem, præterquamquod in utroque fuere supra centra foraminum altitudines aquæ pares, æqualia lumina, tempus idem, arguo ex iis, quæ modo dicta sunt, fuisse etiam in utroque inter foraminum figuras eam rationem, propter quam fluxus aquæ fere æquales inter se fieri potuerint.

Venio

Venio ad ipsas velocitates aquæ ex Vasis per foramina erumpentis. Hæ a nonnullis Doctis Viris ex longitudine cylindri aut parallelepipedi, pro base habentis id lumen, ex quo fluit aqua, ac soliditate sua aquæ datæ quantitatem exæquantis, æstimantur. Hac adhibita ratione invenio, velocitatem fluentis aquæ in Experimento sexto eam fuisse, qua mobile æquabili motu pedes 1536, unius minuti temporis spatio, peragravisset. Vides itaque, Marinoni Ornatissime, hanc velocitatem non modo non fuisse multis partibus minorem ea, quæ corpori, postquam de altitudine pedum tredecim decidisset, conveniret; si gravia cadentia quovis temporis minuto secundo pedes duodecim emetirentur: verum etiam fuisse majorem. Illi enim corpori ea conveniret (ut ex Doctissimo P. Grando jam retulimus) velocitas, qua posset corpus idem pedes circiter 1493 æquabili motu, intra tempus minuti unius, emetiri. Vides etiam, quanto intervallo comparatio hæc ab ea differat; quam, adhibito Mariotti experimento, modo laudatus Auctor instituit.

At si ponamus, quæ Christiani Hugenii sententia fuit, decidens corpus, spatio minuti unius secundi, pedes quindecim & pollicem unum, hoc est pollices 181 perlustrare; inveniemus, corpori de altitudine pedum tredecim decidenti eam convenire velocitatem, qua motu æquabili peragraret, unius minuti tempore, pedes 1680. Numerus autem hic si contendatur cum numero 1536 ad nostrum experimentum pertinente, differentia minor esse decima primi numeri parte comperietur.

Sed liceat quod sentio de recta hujusmodi velocitatum æstimatione, pro institutæ rei veritate proferre. Ergo ad finem hunc exponam, jactus aquæ effluentis tum e lamellarum foraminibus, tum e tubulis (de quibus in propositis experimentis dictum est) singulos

eodem modo menſos, inventos fuiſſe attingere diſtantias æquales: niſi quòd (contra ac quantitates aquæ indicare videbantur) aqua exiens per lamellarum foramina obſervata eſt ire paullo longius illa, quæ per tubos effluebat. Hinc autem proclive eſt intelligere, aquæ velocitates fuiſſe ferme æquales cunctis in experimentis. Neque res hujuſmodi nunc primum obſervavi: immo ſimilium obſervationum cauſſa, in jam citato Diarii Italici loco, olim animadverteram; conſiderationem Parabolarum, quas jactibus vivi argenti deſcribi Blondellus fuerat expertus, uſui eſſe poſſe, ut confirmetur experimentis Theorema, quod principio allatum eſt. Atque hic quidem ſeſe offerret occaſio producendæ explicationis ejus rei: ſed epiſtola hæc jam ſatis longa non patitur, ut a propoſitis experimentis ſermonem avertam.

In quibus quoniam velocitates obſervatæ fuerunt ferme æquales; iccirco in ea opinione ſum, ut putem, velocitatum determinandarum methodum ex deformatione aquæ in cylindros, aut priſmata ortam (de qua paullo ſupra dictum eſt) tuto inſtitui non poſſe. Copia ſiquidem effluentis aquæ in allatis experimentis major vel minor haudquaquam facta eſt ex majore vel minore velocitate; ſed ex cauſſa hac, quod per æqualia lumina, æqualique temporis ſpatio, in aliquibus experimentis confertiores atque ideo plures, in aliis vero rariores atque ideo pauciores prodierunt aquæ guttæ: quamobrem fuere effluentis aquæ filamenta in illorum venis confertiora, laxiora in iſtorum venis. Et ſane quoties fluit aqua ex lamellarum foraminibus, pauciora prodire aquæ filamenta evidens eſt; nam venæ, ſeu funiculi aquæ effluentis diameter apparet perſpicue minor diametro luminis: ut vel in Libro de Caſtellis expoſuimus. Quoties vero ex tubis

emanat

emanat aqua; etsi venæ diameter a diametro luminis tam parum differt, ut de ea differentia (quemadmodum diximus citato in Libro) nihil certi constitui queat; attamen, vel in hujusmodi fluxibus possunt filamenta fieri confertiora. Si enim per æqualia lumina, æqualibus velocitatibus, in quinto experimento plus aquæ effluxit e tubulo, quam in quarto; in sexto plus, quam in quinto: quis putet, in sexto filamenta non fuisse confertiora quam in quinto; in hoc itidem conferta magis, quam in quarto?

At etiamsi illam prius traditam velocitatum æstimandarum methodum recipere vellemus; atque eam differentiam superius inventam inter numerum 1680, & numerum 1536 ad externas caussas referri non posse censeremus: nihilo tamen minus in ea persisterem sententia, ut crederem (res paradoxo similis forte videbitur) ut, inquam, crederem; experimenta commonstrare, aquæ tribuendam profecto esse velocitatem majorem ea, quæ in ipsis experimentis apparet. Quod ut clarius explicetur, age, ponamus nobis ante oculos, in primo experimento effluxisse pollices aquæ cubicos 607, at in tertio majorem copiam, nempe pollices 713 emanavisse; quamvis utroque in experimento æqualia tempora consumta fuerint, fueritque eadem stagnantis aquæ altitudo, & eadem medius fidius urgentis aquæ vis, cum hæc ex altitudine ipsa enascatur. Atque hæc cum animadverterimus recte diligenterque, quam deinde comminisci poterimus illius inter pollices 607, & 713 differentiæ caussam, nisi statuamus; in experimento primo majorem quam in tertio aquæ partem ne ageret, aut ne effluere fuisse impeditam? Atque id idem proculdubio esse concludendum, si eadem hac ratione inter se reliqua experimenta conferantur, quis non videat?

Quam-

Quamobrem si aut lamellarum, in quibus lumina erant insculpta, variæ internæ partes, crassities variæ, aut cylindracea cavitatis tubulorum figura, aut dissimiles horum longitudines, aut unius orificii exigua mutatio, præstare id potuere, ut in secundo experimento amplius aquæ emanaret, quam in primo; in tertio amplius, quam in secundo; & sic porro: si in aquæ fluxu ex tubulo in quarto experimento nihil erat, quod indicaret, confertiora evadere posse filamenta componentia aquæ venam, quæ tamen confertiora facta sunt in quinto, confertiora adhuc in sexto; si, inquam, hæc ita se habent; cur non statuamus, fieri maxime posse; ut, si foramini aut tubulo circumstantiæ quædam aliæ, nunc ignotæ nobis, accedant; tum in septimo novo alio experimento se prodat aquæ copia amplior, quam prodierit in sexto illo nostro, atque ita deinceps? usque dum vel in effluxus quantitate, superincumbentis aquæ vis compareat tota, quanta est; & quanta possit allato ab initio Theoremati perspicue respondere?

Vtcumque ergo propositæ velocitates æstimentur: rerum hactenus expositarum adjumentis ad dignoscendum consensum inter illud Theorema & experimenta nos quamproxime accedere posse, sane opinor. Illud tamen non opinor, sed certe scio; adjumenta, quæ propositæ difficultati solvendæ conducunt, non ita præstare subsidia ad affinis alius implicatæ rei explicationem: nimirum ad intelligendum, qui fiat, ut in aliis ex descriptis figuris data ratione augeatur aquæ fluxus, in aliis alia. In caussis autem varios fluxus, variasque hasce rationes progignentibus, eas salebras arbitror esse, quæ impediant accessum ad naturam fluxuum aquæ, erumpentis ex vasis per tubos vel per foramina, plane assequendam.

Quod

Quod si ad iter præsternendum, afferam; attendi oportere quid intersit inter fluxum per tubum cylindraceum, cujus pars ingrediatur Vasis aquam, & inter fluxum per eundem tubum admotum foramini in lamella exsculpto, quod æquale sit basi tubi: si afferam; aquam libenter, ut ita dicam, sequi internos tuborum parietes; ut observare datum est ubi tubulum, per quem fluit aqua, longior capaciorque tubus vitreus tamquam ampla vagina ita excipit, ut pars venæ aquæ fluentis ad parietem feriat superiorem cavitatis tubi hujusce; tunc enim ex majore tubo effluens aqua venam efformat diametri ejusdem, ac est majoris tubi diameter; neque talis expansio tota uni reflexioni aquæ tribuenda videtur: si afferam; guttulas aquæ exeuntes ex foraminibus, insculptis in lamellis, statim post exitum describere curvas lineas, quæ portiones non sunt Parabolarum, quas deinde designant: si afferam; experimentis, quæ instituuntur aqua effluente per majora lumina, collatis cum iis quæ habentur emanante aqua per lumina minora (etsi reliqua similia sint, atque paria) eandem omnino rationem inter fluxus per foramina insculpta in lamellis, & fluxus per tubos non reperiri: ubi hæc attulero, aut nihil fere, aut admodum paullulum ad itineris explanationem attulero. Ad quod perfecte explanandum fortasse nimis multarum rerum inventio requiritur: ac fortasse etiam dumtaxat unius, quæ casui reservetur; quemadmodum (ut illustri utar exemplo) a casu profluxit Magnetis ad Polum conversionis notitia, ex qua deinde novum experimentorum genus duxit originem: sine qua tamen, quando futurum fuisset, ut Philosophi & Mathematici ad novi illius generis experimenta animum applicarent, Deus aliquis viderit. Sed hæc jam nimis multa: quæ tamen utilia, ut opinor, videbuntur;

si

ſi cogitatio convertatur ad multiplicia illa Theoremata pertinentia ad Doctrinam Fluentium Aquarum, quæ legibus, quibus aqua fluit ex variis luminibus, Docti Viri ſuperſtrui voluere.

Vt ut vero in hac qualicumque rerum mearum æſtimatione falli poſſim: non tamen omnia, quæ ad Te mitto, exigui erunt momenti. Huic enim Epiſtolæ ſubjicio Ioannis Buteonis, Mathematici ſuo tempore illuſtris, de Fluentium Aquarum Menſura Libellum ex ejuſdem „ Operibus Geometricis „ editis Lugduni 1554. deſumtum. Quæ Opera cum rara ſint, neque ab Auctoribus, qui de fluentibus aquis poſt Buteonem ſcripſere, Libelli illius mentionem fieri invenerim, e re mea eſſe exiſtimavi, Libellum ipſum (Auctoris verbis, orthographiaque omnino retentis) iterata editione proferre. Cur vero ita exiſtimaverim, intelliges ſtatim ac animadvertes, nonnulla in eo reperiri, quæ ad aliquam poſſint Frontini noſtri illuſtrationem pertinere. Porro qui Buteonis Libellum legerit vel non accurate, videbit quidem perſpicue, quam perſuaſum fuerit Docto illi Viro, in Doctrina menſuræ fluentium aquarum altius repetenda, Frontini mentionem prætermitti non poſſe. Accedit profecto ex eodem Libello utilitas haud contemnenda ad cognoſcendam partem aliquam Hiſtoriæ Doctrinæ fluentium aquarum: pro qua Hiſtoria recte atque ordine delineanda (ſaltem privati mei commodi cauſſa) in Auctorum plurium Operibus expendendis, confiteor, me non mediocriter fuiſſe verſatum. Vt vero illa, ac Frontini loca nonnulla paullo fuſius explicarentur, paucas quaſdam annotationes adjeci: indicavi etiam Frontini Articulos, uſus ad id mea Frontini Editione.

Nec quidem „ aliorum ſcripta edere quid humile „ eſſe atque contemtum, „ reputo: immo plane

ſequor

ſequor Virum Summum G. Gul. Leibnitium qui cum iterum edi curaverit Marii Nizolii Opus „ de Veris „ Principiis, & vera ratione Philoſophandi, „ in ea, quam huic Operi præfixit Diſſertatione, poſtquam docuiſſet eſſe aliquos, nonnulla congerentes argumenta, propter quæ alienorum operum editores irridendos cenſeant; tum addit: „ ſed me quidem hæc pa„ rum movent, partim Clarorum Virorum exemplo „ munitum, partim parum dolentem, ſi apud illos „ Cenſores ingenioſus non habear; cui ſufficit, ſtudii „ ſaltem, ac voluntatis laudem retuliſſe. „ Hanc autem me relaturum a Te, cujus eximia humanitas perſpecta mihi eſt, nullus dubito; atque etiam fore confido, ut reliqua benigne ſis excepturus. Vale.

Patavii. X. Kal. Iul. CIↃIↃCCXXIIII.

IO. BVTEONIS

DE FLVENTIS AQVAE MENSVRA.

LIBELLVS.

CVM multa geometræ ſubtiliter in menſionibus aqua miniſtrante docuerint, utpote tempus ipſum partiri, ſolis, ac lunæ diametros intelligere, auri miſturam cum argento detegere, libramenta diſponere. Et plura præter hæc alia miraculo digna, hydraulicis organis, & engibatum generibus variis oſtendunt. Nullum tamen eſt invenire qui fluentis aquæ menſuras indubitato, certoque modo tradiderit. Quæ quidem cognitio, ſicut ex uſu vitæ eſt: ita & ignoratio turpis, nec ferenda diſciplinis. Nam & Archimedi laus eſt numerum arenæ, non alioquin uſibus

aptum libello docuiſſe. Gratum igitur, nec inutile ſtudioſis arbitror fore, ſi fallacem, & incertum apud antiquos labentis aquæ modum ſolida, ſtabilique ratione conſtituam.

Iulius Frontinus Vir conſularis, cum ab Imperatore Nerva delegatum aquarum officium accepiſſet, quæ tum ad uſum, tum ad ſalubritatem, atque etiam ad ſecuritatem urbis pertinebant, commentarium de aquæ ductibus, in adminiſtrationis ſuæ formulam ſcripſit. In quo quicquid ad rem pertinere putavit: non docte minus, quam diligenter eſt exequutus. Vnde multa mihi ad intelligentiam propoſiti, ſunt in hanc lucubrationem referenda. Imprimis igitur aquarum nomina, quæ in urbem Romam
Art. influebant fuerunt hujuſmodi. Appia, Anio vetus,
4. Martia, Tepula, Iulia, Virgo, Alſietina, quæ eadem
Art. vocabatur Auguſta, Claudia, Anio novus. Narrat
5. & ſeqq. præterea quibus ex locis, & a quoto milliario duci cœpiſſent, quantum ſubterraneo ſpecu, quantum ſubſtructione, quantum opere arcuato. Poſtea altitudinem cujuſque, modulorumque rationem, & ab illis erogationes, quantum extra urbem, quantum intra quiſque modus, cuique regioni pro ſuo modulo unaquæque aquarum ſerviat, quot caſtella publica, privataque fuerint. Et ex his quantum publicis operibus, quantum muneribus, quantum lacubus, quantum nomine Cæſaris, quantum privatorum uſui, beneficio principis daretur, pari diligentia proſequitur. Porro fiebant diſtributiones finitis, conſtitutiſque modulis, quos plumbeæ fiſtulæ caſtellis exceptæ terminabant, vocabulo ſecundum magnitudines ipſa-
Art. rum progreſſu numerali creſcente. Nam quæ mini-
25. ma fuit, & uſu frequentiſſima, dicebatur quinaria, ab ipſius diametro quinque quadrantum unius digiti.

Quæ

Quæ quidem ratio in sequentibus quoque modulis, ad vicenariam usque procedit, diametro per singulas, adiectione singulorum quadrantum crescente. Vt in senaria, quæ sex scilicet quadrantes in diametro habet, & septenaria quæ septem. Et deinceps incremento simili usque ad vicenariam, quæ quinarias sexdecim capit. Etenim circuli invicem se habent, sicut quæ ab ipsorum diametris quadrata. Ab Art.
hac autem ad majores subsequentes procedit aliter ratio, 29.
constans ex numero digitorum quadratorum, qui area, id est lumine cujusque moduli continentur, a quibus & nomen fistulæ capiunt. Nam quæ habet luminis in rotundum coacti digitos quadratos viginti quinque, vicenum quinum appellatur. Similiter tricenaria, & deinceps per incrementum quadraturæ digitorum, usque ad centum vicenum. Vltra quod embadon non erat progressus modulorum in erogatoriis fistulis, isto quo dixi modo terminatis. Vitruvius autem a fistulis quinariis intra centenarias consistit, denum pedum longitudinem omnibus præfiniens, singulisque secundum capacitatem pondera. Vult etiam ex latitudine laminarum quot digitos habuerint antequam in rotundum flectantur magnitudinum nomina concipi. Vtpote, cum lami- Art.
na fuerit digitorum quinque, & fistula perficietur ex 25.
ea, vocari quinariam. Et a digitorum quinquaginta latitudine, quinquagenariam. Itemque reliquas similiter. Sed rationem hanc non sequitur Frontinus, nec etiam probat, propterea quod (ut ipse ait) hoc incertum est. Quoniam cum circumagitur lamina plumbea, sicut interiore parte contrahitur: ita & per illam quæ foras spectat extenditur. Ex istis igitur apparet, circa modos fistularum temporibus variatum, quinariamque Vitruvii capaciorem fuisse,

etiam ſenaria Frontini. Nam cum laminæ quinque digitorum, hoc eſt viginti quadrantum latitudo curvatur in cylindrum, fit in ipſa baſi diametros quadrantum ſex cum quatuor undecimis. [1] Nec ulla fit ex tali curvamine (ut putat Frontinus) contractio, in quinariis potiſſime, cum tenui corio fundantur. Nec etiam in grandioribus, ſi perite tractetur opus a plumbariis. Erat autem quinariæ modus omnium maxime notus, ac receptus. Propterea cæteri omnes, non ſolum fiſtularum, ſed etiam canalium moduli, in commentariis principis ad quinarias redigebantur. Idque cum in aliis, tum in Appia fecit Frontinus.
Art. Nam hic ubi jungebatur cum ramo Auguſtæ, in-
65. veniri dicit altitudinem aquæ pedum quinque, latitudinem vero pedis unius & dodrantis. Fiunt (inquit) areæ pedes octo & dodrans, quæ ſunt quinariæ mille octingentæ vigintiquinque. Cui quidem ſummæ pauxillulum quiddam a vero ſuperfluit. Nam cum ſit digitus pars decima ſexta pedis, & quinariæ lumen ſit digiti, & quinquaginta unius ducenteſimæ viceſimæ quartæ partis: ex area jam dicta pedum octo & dodrantis, hoc eſt digitorum 2240, [2] colliguntur quinariæ mille octingentæ vigintiquatuor, cum

1. *Nec ulla fit ex tali curvamine (ut putat Frontinus) contractio.*] Non tamen quod hic aſſeverat Buteo ratione ulla demonſtrat: quando experientia ſatis docere videtur, rem, ut Frontinus putavit, ſe habere; niſi laminæ circum ſolidas cylindraceas formas propoſitis convenientes menſuris curventur. Talibus autem formis uſos fuiſſe Plumbarios illos, quis harioletur?

2. *colliguntur quinariæ mille octingentæ vigintiquatuor*, &c.] Ego olim inveni Quinarias mille octingentas vigintiquinque, & Quinariæ quadrantem ſemunciam & amplius: ut ſcripſi in Nota 5. ad Art. 65. atque modo iteratis ſupputationibus iterum inveni. Buteo enim, ad cujus propoſitum minus intererat minutias perſequi diligenter, nimis exiguis numeris uſus eſt pro ratione inter digitum quadratum, & quinariam definienda: ſatis enim liquet, eum ſtatuiſſe, digiti quadrati ad quinariam eandem eſſe rationem, quam habet numerus 224 ad 275; nos vero poſuimus eam, quæ intereſt inter 20736 & 25447. Redeo ad rem: ſi ſummæ a Buteone inventæ pauxillulum quiddam a vero non ſuperfluit, veræ ſummæ pauxillulum certe deficit.

cum triginta duabus quinquagesimis quintis, & non 1825. Sed tantillum differentiæ, [3] aut non curavit author, quod & in aliis ipsius calculis, perscrutando diligenter inveni, aut est locus corruptus: sicut passim toto libro numeri depravatissime leguntur. Modificabantur etiam aliter in augmentum fistulæ, per quinarias, cum eodem scilicet lumine plures includerentur, in quibus secundum adjectionem quinariarum amplitudo luminis crescebat. [4] Vtpote, fistula capiens octoginta quinarias, diametrum suæ basis habebat medium proportionale, inter lineam quinque quadrantum, & lineam centum digitorum, vel (quod eodem recidit) inter lineas, [5] alteram duorum cum semisse digitorum, & alteram quinquaginta. Et sic in aliis. Quæquidem modulatio quamvis sit omnium artificiosa maxime, & ad computationem expedita, minimum tamen usurpata. [6] Idque, sicut existimo, propter ignorantiam artis. Rarissimi enim semper fue-

3. *aut non curavit author* &c.] similes minutias excessuum sive defectuum hisce in circumstantiis neglexisse Frontinum, animadverti in Nota paullo ante citata: minutiarum autem minutias (ut nonnulli appellant) nimirum scripuli partes Frontinum semel tantum attendisse; observavi in Nota 6. IIII. ad Art. 26.

4. *Vtpote, Fistula capiens octoginta quinarias, diametrum suæ basis habebat* &c.] Digiti 100 sunt quadrantes 400; sed ratio inter 5 & 400 eadem est ac inter 1 & 80: ergo ratio inter unam quinariam & 80 quinarias eadem est quæ inter lineam quinque quadrantum & lineam centum digitorum. Itaque si inter lineam quinque quadrantum & lineam octogies æquantem quadrantes quinque (nimirum lineam digitorum centum) assumatur media proportionalis, erit quadratum super prima ad quadratum super media (& quod consequitur, circulus, sive os fistulæ factæ prima diametro, ad circulum, sive os fistulæ factum media diametro) ut linea prima ad postremam; ut linea quinque quadrantum ad lineam centum digitorum.

5. *alteram duorum cum semisse digitorum, & alteram quinquaginta.*] Rectangulum factum a duabus lineis, quarum altera quinque quadrantum digiti, altera centum digitorum, æquale est Rectangulo facto a duabus lineis, quarum altera decem quadrantum (duorum cum semisse digitorum) altera digitorum quinquaginta. Hinc linea media inter illas exæquat lineam inter hasce mediam.

6. *Idque, sicut existimo, propter ignorantiam artis.*] Non quidem videtur (ut indicant vel ipsæ superiores Annotationes 4. & 5. quibus rem explicavi.) mirabile quodpiam artificium in proposita diametrorum Fistularum inven-

fuerunt omnibus seculis geometræ. Fundebantur præterea ex ære fistulæ, qui calices dicti sunt, longitudine quidem breviores, sed eadem luminis ratione cum cæteris, induti rivo, vel castello, quibus applicabantur eadem apertura fistulæ plumbeæ. Et erat excogitatus calix: quoniam rigor æris contumacior ad flexuram non temere potest laxari, vel coarctari. Aquam insuper non nisi ex castello duci senatusconsultum permittebat privatis, ne aut rivi, aut fistulæ publicæ frequenter lacerarentur. Sic igitur per rivorum, & fistularum modulos aquæ dimensio procedebat. Nunc autem sequitur, ut ostendam, quibus modis fallant in hoc genere mensuræ. Certum est imprimis referre plurimum, quanam positione fistulæ producatur aqua. Datis enim fistulis æqualibus, [7]quæ devexa fuerit, modum suum ipsa velocitate profluvii, faciet ampliorem, quam quæ perlibrata jacebit. Cujusmodi fallacia, cum non sit in obscuro, nullam tamen cautionem super hac Frontinus adhibuit. Rursumque in eadem positione fistularum, longiorem brevior fusione superabit. Propterea quod, [8]quo longioribus obstaculis inhibetur aquæ meatus: eo vis ipsa decursus tardior fertur; quare & parcius defluit aqua. Huic autem vitio

Art. 36.

Art. 160.

inventione contineri. Crediderim propositam methodum minime usurpatam eo tempore, non propter ignorantiam artis; sed proptereaquod Aquileges illi in Fistulis, ultra Vicenariam, areas definitas integris digitorum quadratorum (non quinariarum) numeris constituere sibi proposuerint.

7. *quæ devexa fuerit, modum suum* &c.] Animadversio hæc (ut Buteo quoque inferius indicare videtur) fluxit ex Frontini Commentario, qui Art. 36. hæc tradidit: calix *in rectum & ad libram collocatus modum servat: ad cursum aquæ oppositus, & devexus amplius rapit*. Frontinum vero nullam super hac re cautionem adhibuisse, haud facile concesserim ego: quippe qui in Nota 2. ad Art. 113. interpretatus sim, hujus Articuli verba hæc, *circa collocandos quoque calices observari oportet, ut ad lineam ordinentur*, interpretatus, inquam, sim, verba hæc significare; Calicum axes in æqualibus a centro gravium distantiis, sive ad Libram, esse oportere: hoc est perlibratos.

8. *quo longioribus obstaculis inhibetur aquæ meatus* &c.] Diximus in Nota 8. II. ad Art. 112. *per nuda foramina insculpta in laminis, minus* (*minus* etiam in citata Nota legendum est) *aqua, ceteris omnino, ut ajunt, paribus, effluere, quam*

vitio sic occurrebant. Nam per quinquaginta pedes, ab eo castello unde sumeretur aqua, edicto senatus jus non erat laxiorem fistulam subjicere, quam quæ fuerat impetrata. Sed ista cautio quamvis aliquid adhibeat temperamenti: non tamen omnino vitium tollit. Nam si post quinquaginta pedes, ex duabus quinariis altera spatio notabili procedat longius: nihil obstat, secundum rationes jam supra datas, quo minus etiam ab istis fusio proveniat inæqualiter. Alios etiam errores adnotavit Frontinus, in hæc verba. Calicis (inquit) appositio habet momentum. Nam si in rectum, & ad libellam sit collocatus: suum modum servat. Et ad cursum aquæ, si oppositus, devexatusque fuerit: amplius rapit. Ad latus autem prætereuntis aquæ conversus, & supinus, nec ad haustum pronus: segniter, exiguumque sumit. Ad hæc igitur præcavenda, circa locandos calices observari jubet, ut ad lineam ordinentur, nec alterius fistulæ calix inferior, alterius superior statuatur. Inferior (inquit) plus trahit: superior minus ducit. Quia cursus aquæ ab inferiore rapitur. Talis autem ordinatio Frontini sicut inæqualitatem conceptus a calicibus aufert: [9] ita & eam quam de fistulis provenire jam supra docui nihil emendat. Sunt & aliæ præter has erroris causæ, quas idem commemorat. Asserens omnem aquam quoties ex erogatorio veniens, intra breve spa-

Art. 106.

Art. 36.

Art. 113.

Art. 35.

quam per fistulas: propterea que statuendum putavimus, haudquaquam constare; copiam aquæ fluentis primum per arctam fistulam, & deinde offendentis laxiorem fistulam, majorem esse oportere; quam si eadem aqua per fistulam, ubique eodem modo arctam, fluere perrexisset. Nihilo tamen minus, ubi comparatio non est inter foramina in lamellis insculpta & fistulas; sed inter calicis fistulam & fistulam longiorem: re diligentius expensa, credibile fit; ab angustioris longiorisque fistulæ superficie velocitatem aquæ posse parte aliqua imminui.

9. *ita & eam quam de fistulis provenire* &c.] Hic eam iterum indicari inæqualitatem opinor, de qua jam dictum supra est in superiore septima Annotatione.

ſpatium in caſtellum cadit, non tantum reſpondere modulo ſuo, ſed etiam exuperare. Quoties vero ex humiliore, id eſt ex minore preſſura longius ducitur, ſegnitia ductus, modum quoque deperdere. Ideo ſecundum hanc rationem (inquit) aut oneranda eſſet erogatio, aut relevanda. Hic igitur manifeſte fatetur author, quinariarum modulos variari, & adjectione, vel detractione corrigendos. Sed quatenus, vel quomodo, nihil docet. Vnde fit remedium ipſo confuſius errore. Hoc inſuper addidit author. Si fuerit ad du-
Art. ctuum capita vis aquæ rapacior, ut ex largo, & ce-
73. leri flumine excepta, velocitate ipſa modum ampliat. Ego autem & aliam erroris cauſam inveni, de qua Frontinus alioquin acutus homo, ne leviter quidem ſuſpicatur, quamvis errorem ipſe videat. Cum enim ad capita ductuum per alveos ſtructiles exciperetur aqua, ex ipſorum latitudine luminis, atque profundo, conceptionis modus quinariarum numero ſtatuebatur, ſicut in Appia dictum fuit. Cujus dimenſio pedum quadratorum octo & dodrantis efficiebat quinarias, ut jam dixi, mille octingentas viginti quatuor, cum triginta duabus quinquageſimis quintis. Sed hujuſmodi productum, quamvis areæ canalis ex vero reſpondeat: majori tamen ſemper multitudine quinarias dabit erogatio, quam ex luminis partitione colligantur. & hujus rei cauſa eſt. Quoniam cum aquæ multitudo magna uno rivo ducitur, ipſa ſe ſui copia, & quaſi pondere, ad celeritatem magis protrudit, quam cum eadem poſitione, per exiguam fiſtulam derivatur. Et ſicut velocitas modum ampliat: ſic & tarditas minuit. Neceſſe eſt igitur grandiores ductus pluribus ſemper quinariis, quam pro
Art. ratione luminis erogari. Vnde cum in principalibus
64. commentariis Frontinus inveniret aquarum conceptionem,

ptionem, in universo facere quinarias 12755. Erogationem vero, quinarias 14018: plus scilicet in distributione, quam in accepto, quinariis mille ducentum sexaginta tribus:[10] talis excessus causam non intelligens nihil aliud hoc esse putavit, quam errorem eorum, qui ab initio parum diligenter æstimationem aquarum fecerant. Ipse igitur capita ductuum metiri voluit, ubi circiter quinariis decem millibus ampliorem, quam in commentariis modum invenit. Ego autem, sicut non negaverim aliquid falsi circa mensuras accidere potuisse: ita vix concedam, ut ad decem quinariarum millia processerit error. Sed credo potius, in eo decipi Frontinum, quod in constitutione quinariarum ab ea moduli ratione discedit, quam a Vitruvio, & plumbariis institutam esse fatetur. Et aliam paulo minorem ipse perscribit: sicut jam supra recitavi.[11] Fit autem maxime probabile, modulos aquarum commentariis ascriptos circa Vitruvii tempora, qui Frontinum longe præcessit, ipsius Vitruvii quinariis respondere. Frontinus autem suis quinariis, hoc est minoribus ductuum podismos recen-

10. *talis excessus caussam non intelligens, nihil aliud hoc esse putavit* &c.] Bona venia Manium Buteonis dixerim: si caussam non omnino percepit Frontinus, (eum vero caussam non omnino percepisse, jam fassus sum in Nota 6. l. II. ad Art. 64.) non tamen omnino non intellexit. Nonne, exempli caussa, de Anionis Novi conceptione agens (in Art. 73.) postquam indicaverat aquæ exuberantiam, asseruit, ejus rei rationem fuisse, *quod vis aquæ rapacior, ut ex largo & celeri flumine excepta, velocitate ipsa ampliat modum?* Non id fuit aquæ velocitatem inter caussas illius excessus constituere?

11. *Fit autem maxime probabile, modulos aquarum commentariis ascriptos circa Vitruvii tempora* &c.] Quæ hoc loco Buteo habet, ego quidem non animadverteram: nunc autem ajo, mihi quoque probabilem fieri ejus sententiam; dummodo tamen ad aliquos dumtaxat Modulos Aquarum Commentariis adscriptos, & ad aliquos tantum Ductuum podismos sententia eadem referatur. Namque ex iis, quas metitus est Frontinus, Aquis, duas inprimis abundantes post Vitruvii tempora ductas fuisse, ubi animadvertatur, illud quoque perspicuum fiet atque manifestum, vel hoc uno nomine (plura enim, quæ addi possent prætermitto) Buteonis sententiæ non universali, sed limitata admodum ratione esse assentiendum. Ac Frontinum, si non maximi, magni tamen erroris Mensores recte damnavisse.

recensuit. Fuit ergo necesse in eisdem canalium mensuris, minores quinarias numero superare majores. Quare Frontinus mensores ante se non recte damnavit erroris. Ex superioribus itaque satis videor ostendisse, quam multipliciter fallax, neque sibi constans fuerit apud antiquos fluentis aquæ dimensio. Quod cum ex parte magna cognoscerent: nullum tamen remedium universaliter in re tanti momenti, homines docti, & ingenio perspicaces excogitare potuerunt. Cujus admiratio rei, tum & inventionis amor non mediocriter me ad scrutandum incitavit, quanam emendationis via, inveteratis vitiis occurri posset. Multa igitur scrupulose mihi diuque cogitanti, illa tandem subiit animum cogitatio: ut quemadmodum tempus ipsum aqua stillante metitur: sic & fluentis aquæ modum mensura temporis, veluti mutua posse constitui. Quod dico fiet ita. Deformetur urceus ex materia qualibet, vel potius ex ære malleato, alicujus dimensionis notæ, ut puta, pedum quinque cubicorum. Habeatur item clepsydra, horarium tempus etiam particulatim ostendens, quibus præparatis facies, ut eodem momento, & ea quæ metitur aqua in urceum subjectum defluere, & clepsydra stillare incipiat. Vase autem ad summa labra repleto, aut si mavis ter, quater, pluriesve depleto, [12] ex totius aquæ cubis, pro-

12. *Ex totius aquæ cubis, profluviique tempore* &c.) Satis quidem, ut reor, ex his non modo, verum etiam ex iis, quæ sequuntur, apparet; Buteonem docuisse, fluentium aquarum velocitates, ut congruentes aquarum earundem quantitates determinentur, diligenti mensura esse explorandas. Quantitatem enim aquæ, per non ignotum lumen fluentis, ad temporis modum conferre, idem plane est, atque velocitatem aquæ explorare. Porro simili ratione ac posterioribus temporibus nonnulli Docti Viri experimenta instituerunt, ut ex datis lumine, tempore, & quantitate aquæ, hujus velocitatem definirent: Buteo quantum esse oporteret lumen illud, per quod dato tempore data quantitas aquæ flueret, experiundo inquirere docuit. Quod si Iulii Frontini, Ioannis Buteonis, atque Benedicti Castellii doctrinas comparemus; inve-

profluviique tempore, nomen aliquod mensuræ constitues. Quod numero multiplicatum universale fiet in cæteris. Exempli gratia. Ponatur, ut quadrantis horæ curriculo, urceum quater saliens aqua repleverit: fiunt in corpus cubici pedes viginti. Et tale demensum vocetur quinaria. Cum igitur tempore jam dicto, aliqua fistula compleverit urceos octo, seu duplo minore tempore urceos quatuor: utroque modo duas quinarias perficiet. Et ita deinceps. Nec erit operosum fistularum lumina ad rationem constitutam modulari: & si modo paululum fiant laxiores quam debeant. Parvulo siquidem obthuramento, & experimentis aliquot, ad destinatum modum facile temperabuntur. Cæterum si fuerit abundantior aqua, quam ut mobili vase concipi sit expeditum, derivetur in fossam, creta, sive glarea constipatam diligenter, ne facile combibat humorem. Cujus forma si fuerit rectangula, directisque ad perpendiculum marginibus, fundoque librato, patens in longum pedes ducentos, in latum vero pedes centum: & in eam fluentis aquæ rivus quadrantis horæ spatio, altitudinem aquæ fecerit, ad pedes quinque. Dicemus totius aquæ solidum, efficere pedum cubicorum millia centum. Quare & ex institutione nostra, quinariarum millia quin-

inveniemus, opinor, notas fuisse Frontino plures circumstantias, ex quibus aquarum cum velocitates, tum modi augentur, vel minuuntur (quemadmodum diximus in Nota I. III. & IIII. ad Art. 113.) artificium tamen ad exploranda hujusmodi incrementa, & decrementa tradidisse nullum, nullum quoque certum Theorema, quod leges a Natura servatas, & varias rationes inter varios fluxus, atque inter velocitates varias exprimeret; Buteonem vero modum explorandi incrementa illa & decrementa, non sine aliquo (in consideratione aquæ, tanquam solidi) indicio usus Geometriæ, tradidisse: at Castellium aperta magis distinctaque Geometriæ tractatione conatum fuisse struere universale Theorema, cujus ope, ubi necessaria data haberentur, aquarum velocitates subductis rationibus possent definiri. De quo Theoremate plura in Nota modo proposita alibique, jam a nobis litteris fuere mandata.

quinque. His itaque rationibus, & exemplis (ni fallor) & antiquorum error manifeſtus, & emendatio probabilis erit. Et ita ad fluentis aquæ menſuram ſe noſtrum habet inventum.

IOANNIS POLENI

AD

Reverendissimum Abbatem

D. GVIDONEM GRANDVM

Serenissimi Magni Etruriæ Ducis

Theologum, & Mathematicum, atque in Pisano Gymnasio Mathesis Professorem eximium

EPISTOLAE DVAE.

In quarum altera proponuntur nonnulla de Telluris Forma: in altera vero quædam de caussa Motus Musculorum. Primæ autem accedit Observatio Defectus Lunæ habita Patavii Anno CIↃIↃCCXXIIII.

Y

Fig. III.

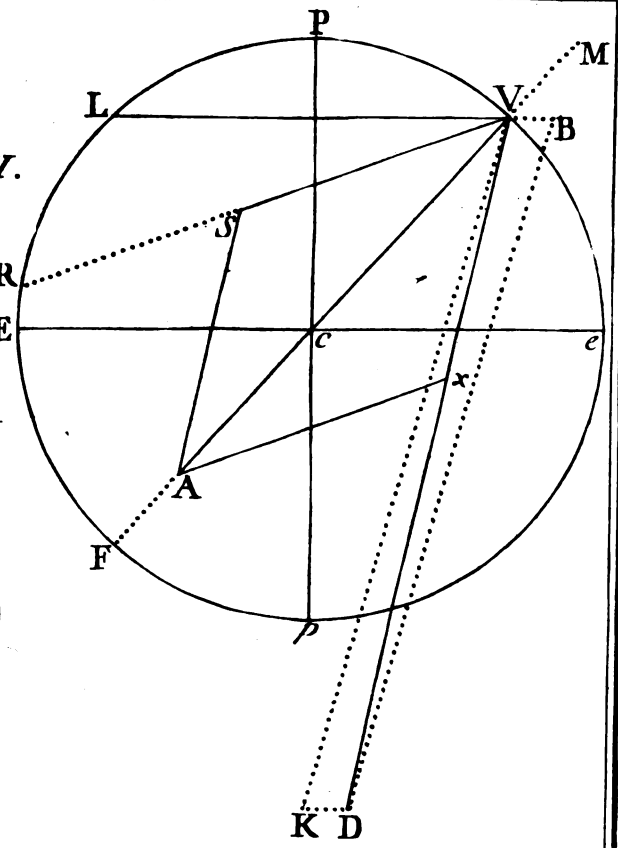
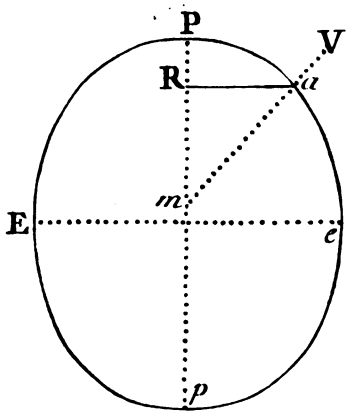


Fig. II.



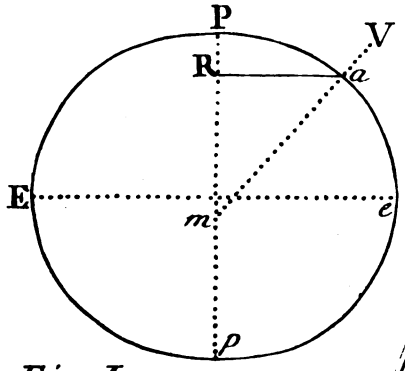
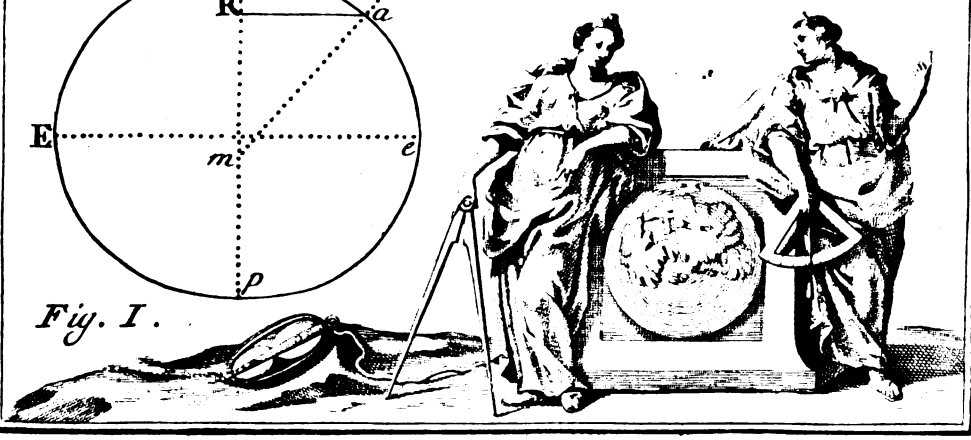
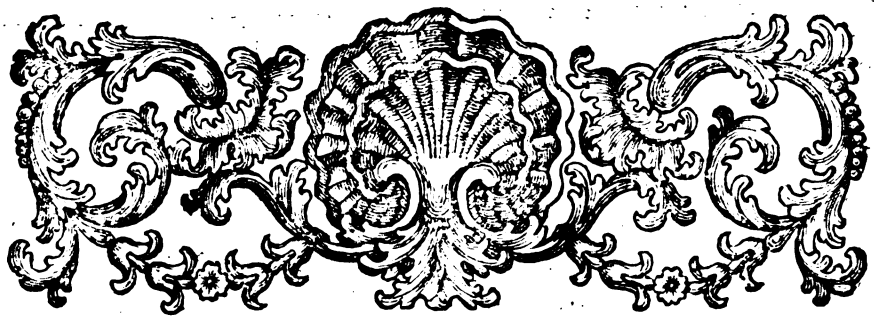


Fig. I.





VIRO CELEBERRIMO

ABBATI GVI. GRANDO

Ioannes Polenus S. P. D.

NVperrimum Lunæ Defectum, cujus Phasium nonnullarum (quantum æstimare licuit) tempora huic subjecta Epistolæ, Abbas Præstantissime, reperies, observavi quidem libenter, animadvertens ex hujusmodi phænomenorum observationibus plures sane, easdemque insignes, accessiones cum ad astronomicas res, tum ad Geographicas fuisse allatas: sed libentius navassem observationi operam meam qualemcumque, si spes ulla fuisset, posse veram figuram Telluris ex hujus umbra, in disco Lunæ apparente, dignosci. Vt enim lubens fateor, argumentum de Telluris figura proxime ad sphæricam accedente haudquaquam spernendum a Lunæ Defectibus duci; in quibus Telluris umbra in Lunarem discum incidens forma circuli apparet; neque vero ullius solidæ figuræ umbra ad distantiam modicam excepta

(Lunæ autem diſtantia diametrorum triginta Telluris projicientis umbram, pro modica habenda eſt) in quacumque lucidi corporis poſitione, circuli formam in Lunæ diſco poteſt exhibere, niſi ſolida figura ad ſphæricam proxime accedat: ut, inquam, id lubens fateor, plane tamen reor, puſillum Telluris a ſphærica figura defectum ex umbra ejus in Lunam incidente percipi minime poſſe; ſive Telluri Sphæroidis tantulum verſus Polos oblongatæ, inſtar (ut ita dicam) ovi aut pruni, forma tribuatur; ſive, cæpæ inſtar, Sphæroidis tantulum ſub Polis depreſſæ.

Neque ſane ab hac ſententia removere me poſſunt ea, quæ I. Childræus in Libro, Anglica lingua ſcripto, cui „ Britannia Baconica „ titulum fecit, teſtimonia dat Tychonis Brahe, & Ioannis Kepplerí, animadvertentium (ut ex ipſo Childræo refertur in Diario Gallico x. anni 1667.) phænomena alicujus Defectus Lunæ viſa fuiſſe indicare, Telluris figuram ovi ſimilem eſſe. Namque ſectio (quod recte animadvertit Io. Caſp. Eiſenſchmidius in „ Diatribe de „ Figura Telluris „ Art. xxxv.) tranſverſa coni umbroſi Telluris in regione Lunari longe major ipſo lunari diſco cum ſit, & propterea margo umbræ in Luna deficiente cum nonniſi partem exiguam integræ, quæ fieri poſſet, ſectionis exhibeat, cumque gibberoſa ſit Lunæ ſuperficies, fruſtra perfectus abſolutuſque (vel ſi nullæ eſſent in lucis confiniis ſpuriæ umbræ) terminus tranſverſæ ſectionis coni umbroſi Telluris in obumbrata Lunæ facie inquiretur. Phyſicam vero cauſſam illius figuræ Telluris affert hanc Childræus: ad utrumque Polum nix hyeme cadit magna copia, quæ conglaciatur, neque æſtivo tempore tota liqueſcit; itaque a Mundi origine ad hæc tempora magnos cumulos acceſſiſſe regionibus

illis

illis necesse est, quibus ipsa Tellus oblonga reddita sit; eademque de caussa, conversione annorum fiet etiam oblongior. Videturque Childræus assiduas quasdam Naturæ operationes attendisse, non secus ac Polybius, qui (Hist. Lib. IIII.) affirmavit; „ venturum „ aliquando tempus, quo Mæotidis alveus terræ „ prorsus æquetur: cum enim, „ scribit, „ alvei, „ de quibus loquimur, certis claudantur terminis; „ manifestum est, quantulumcumque materiæ defe- „ ratur, etiam si perexiguum esset, dum tamen id „ fiat assidue, longo temporum spatio futurum, ut „ omnino repleantur: quando autem devectæ mate- „ riæ non parva quantitas est; sed infinita pene mul- „ titudo, perspicuum est, id quod dicimus, non lon- „ ge post futurum; quod etiam ex parte jam factum „ apparet: quippe Mæotis jam fere repleta est. „ Verum post duo annorum millia Mæotis terræ nec æquatur, nec ab antiqua valde differre videtur; incertumque est, qua ratione in hujusmodi congestionibus Natura operetur; & multo quidem incertius id, quod de illis nivium concretionibus Childræus in medium affert. Quæ paullo quidem fusius sum persecutus, ut me ab hac levi contra sphæricam Telluris figuram conjectura, quasi ipso in limine prorsus liberarem.

At gravius argumentum, adversus sphæricam Telluris formam, vires gravitatis suppeditant; a quibus incrementa acquiri videntur, dum ab AEquatore Circulo Polos versus acceditur. Multi enim sunt, qui putant, nonnisi positis hisce incrementis posse caussas explicari illarum observationum, quibus constare dicitur; Horologiorum Pendula in Torrida Zona breviora, quam Lutetiæ Parisiorum, requiri ad tempora æqualia dimetienda. Quare iisdem perplacet, Sphæ-

roidis tantulum sub Polis depressæ (puta solidi geniti ex rotatione Ellipsis circum axem minorem) figura Tellurem præditam esse. Ponunt enim, a vi trahendi materiæ insita oriri caussam gravitatis, & in majori distantia ab ipsa materiæ mole decrescere corporum gravitatem: hinc vero fieri oportere, ut gravia sub AEquatore sint a medio remotiora, quam sub Polis; atque ideo ab AEquatore Circulo Circulos Meridianos magnitudine vinci; quod propositæ illi figuræ apprime convenit.

Alii tamen contra vehementer defendunt, varias Pendulorum velocitates a virgarum eorundem longitudine varia, pro varietate caloris oriri. Observaverunt enim, æstivo tempore ferreas virgas longitudine sua extendi, hyemali vero tempestate fieri breviores. Quamobrem, cum de allati Pendulorum phænomeni caussa non satis inter se consentiant doctissimi Viri; fortassis non ita facile sphærica Telluris figura, ob phænomenum illud, in aliam mutanda est.

Verum sphæricæ Telluris formæ adversari præterea videtur inæqualitas, terrestrium Meridianorum gradibus attributa. Sunt enim qui Sphæroidis tantulum versus Polos oblongatæ (nimirum solidi geniti ex Ellipsis circum majorem axem rotatione) figuram Telluri fidentius tribuant, postquam animadverterunt, plures esse observationes, quarum comparatione videatur ostendi; Meridianorum in Telluris superficie mensorum gradus, a Meridie versus Septentriones tendendo, minores inveniri. Quod profecto contingere oportere (cum conveniat, ubique Perpendicula ad angulos rectos in Terræ superficiem incurrere) si figura illa Tellus prædita sit, Geometriæ Elementa perspicue commonstrant.

Quod

Quod tamen argumentum ad constitutendam Telluris figuram minus quidem proprium, minusque firmum esse, alii sine hæsitatione ulla opinantur. Statuitur enim; „ exiguam illam graduum differentiam, in „ mensurandis gradibus non admodum distantibus, „ detegi non posse : quia error ex fabrica & usu in- „ strumentorum, differentiam hanc superat; quare ex „ mensuris his de Telluris figura nihil concludi pos- „ sit. „ Itaque, usque eo dum lis sub judice est, & alii dantes Telluri figuram Sphæroidis versus Polos oblongatæ, Meridianorum gradus ab AEquatore Circulo progrediendo ad Polos magnitudine minui; alii vero contraria prorsus ratione Sphæroidis depressæ sub Polis formam Terræ tribuentes, gradus ab AEquatore Circulo progrediendo ad Polos magnitudine augeri volunt : nonne tutius videri potest tueri etiamnum Telluri sphæricam formam? atque ita eam Propositionem ponere, quæ ab utraque ex modo allatis sententiis minus hercle distabit, quam distent sententiæ illæ inter se.

Sed ad hunc locum liceat, rationem, Tibi, exponere, quam liti illi dirimendæ conducibilem esse existimo. Persuasum mihi est, posse in gradibus Circulorum ad AEquatorem Parallelorum explorari differentias multis quidem partibus majores, quam sint illæ, quæ dicuntur varios inter Meridianorum gradus intercedere. Porro ut explicem, quæ sint graduum differentiæ illæ, de quibus scribam; paucis rationem aperiam, qua eas subductis calculis perquisivi; hinc enim quæ sint, facile intelliges. Itaque posui, Telluris figuram eam esse, quæ ex rotatione Ellipsis circum majorem Axem progignitur : assumpsique Meridiani (*Fig. II.*) P E *p e* P, & Axis majoris P *p* (qui est etiam Telluris Axis) ac minoris Axis E *e* (sive diametri

AEquatoris) eas mensuras, quæ in Commentariis de Magnitudine ac Figura Terræ a Celeberrimis Viris Cassino & Maraldo conscriptis (pag. 242. 243.) definiuntur. Atque ducta recta V *a m* (quæ tangenti Ellipsim in *a* normalis esset) efformante cum Axe P *p* angulum *a m* P graduum quadraginta duorum (quare puncto *a* respondet Latitudo graduum quadraginta & octo) & demissa *a* R normali ad eundem Axem P *p*, initisque rationibus inveni, uni gradui Circuli Paralleli, cui convenit radius *a* R, ad Latitudinem graduum quadraginta & octo, deberi, secundum primam illam Hypothesim, exapedas (quarum quælibet senorum Parisiensium Regiorum Pedum) exapedas, inquam, 37769.

Deinde posui Telluris formam, genitam ex Ellipsis circum minorem Axem rotatione: & pro Axe (*Fig. I.*) minore P *p* (qui est etiam Telluris Axis) ac pro majore E *e* (qui AEquatoris diameter est) adhibui mensuras illas, quibus utitur Celeberrimus s' Gravesande in Physices Elementis Mathematicis Art. 1367., ex quibus ambitus Meridiani P E *p e* P ejusdem proxime magnitudinis (de integro enim Meridiani ambitu nulla ferme dissensio est) ac in Hypothesi superiore, obtinetur. Ductaque, eodem modo ac prius, recta V *a m*, cum P *p* angulum graduum quadraginta duorum comprehendente, ex puncto *a* demisi ad P *p* normalem *a* R; nimirum radium Paralleli ad Latitudinem graduum quadraginta & octo: cujus uni gradui convenire exapedas (positis superius æquales) 38546, rationibus subductis inveni.

Est itaque differentia inter unum gradum illius Paralleli in prima Hypothesi, & unum gradum ejusdem Paralleli in Hypothesi secunda, est, inquam, differentia exapedarum 777: quibus minuta, ut appellant, secun-

ſecunda temporis ferme quinque reſpondent. Et hujuſce generis ſunt differentiæ, de quibus me hoc loco acturum eſſe, ſuperius innuebam. Quoniam vero ad explorationem Longitudinum tutius inſtituendam ex Satellitum Iovis Eclipſibus magnæ acceſſiones factæ ſunt; ſi maxima adhibita cura & in parilitate inter opticos Tubos, & in Horologiorum æquabilitate, & in delectu totius ad obſervandum ſupellectilis, & in meridiani temporis puncti inventione, obſervetur ſub eodem Parallelo (puta ſub illo Parallelo ad Latitudinem graduum quadraginta & octo) differentia Longitudinum inter duo loca, quorum alter ab altero diſtet gradibus quinque aut ſex Paralleli ejuſdem; idque iterato fiat, & inter ſe obſervationes iteratæ conſentiant; differentia illa Longitudinum pro certa haberi poterit.

Et, ſi inter eadem duo loca intervallum, accuratiſſima illa methodo ac plane regia, qua Meridianorum gradus ſummi Viri dimenſi ſunt, in exapedis determinetur; hac ratione innoteſcet, num ambitus illius Paralleli minor ſit, quemadmodum fert prima illa Hypotheſis; an vero major ut poſtulat ſecunda; an denique intermediæ cujuſdam quantitatis, ſphæricæ Telluris formæ faventis. Certe (ut ut arcus Latitudinum paullo facilius, quam Longitudinum arcus determinari poſſe videantur) differentia exapedarum 777, eademque inter minores gradus, aptior credenda eſt (ni peſſime fallor) manifeſtandæ veritati, quam differentia graduum circiter 31, quæ inter Meridianorum gradus, majores quidem Parallelorum gradibus, intercedit.

Quemadmodum tamen ſuperius innui, uſque eo dum certiora ex differentiarum majorum dimenſione innoteſcant, argumentum illud ex inæqualitate

gra-

graduum Meridianorum haudquaquam impedit, quin sustinere possimus assensum. Verum quod reliquum est adversus sphæricam figuram Terræ argumentum, id hujusmodi est, ut eidem assentiri omnino debeant ii, qui caussam vis centrifugæ corporum efformantium hunc, in quo habitamus, Globum, admittunt. Et quidem oritur inde necessitas quædam intumescentiæ fluidorum externis Terræ cavitatibus inhærentium, ejusdemque eo majoris, quo magis versus AEquatorem acceditur. In hujusmodi enim accessu, cum vis centrifuga (ubi per hypothesim, ut loquuntur, ejus caussa ponatur) continenter major fiat, magis etiam particulas fluidorum, ut a centro recedant, conniti necesse est; &, quod consequitur, Marium summam superficiem (cui solidarum Terræ partium superficiem, quam proxime respondere, non ambigitur) reddi utique tumidiorem. Quamobrem terræ & aquæ superficies ejusmodi Sphæroidis videtur esse oportere; ut, servatis iis legibus, quibus intumescentia illa obtemperat, quodlibet grave corpus vi suæ gravitatis cieri queat per lineam ad perpendiculum directam in planum contingens Sphæroidis ejusdem id punctum, in quod grave ipsum fertur.

Cogitanti autem mihi, qui fieri posset; ut, vel posita vis centrifugæ caussa, sphærica Telluri figura conservaretur, ea venere in mentem, quæ mox subjiciam; ea, qualiacumque sint, proponens, nihil vero quicquam aut affirmans, aut constituens. Principio igitur animum adverti ad duas hypotheses, quarum priore ponitur; „ omnia corpora in se mutuo gravia esse; „ gravitatem hanc materiæ quantitati proportionalem „ esse; ad inæquales distantias esse inverse ut qua- „ dratum distantiæ. „ Altera vero hujusmodi est: mente concipio, Tellurem plurimis planis AEquatori

paralle-

parallelis quasi divisam ; & pono , segmenta sphærica ab hujusmodi divisione orta , singulatim ceu æquabilia strata haberi posse; ac divisa Tellure in Hæmisphæria duo , alterum cis AEquatorem , alterum trans circulum eundem , in utroque Hæmisphærio strata paribus spatiis ab ipso AEquatore remota, densitatis esse prorsus æqualis; demum utriusque Hæmisphærii strata comparata inter se inæquali densitate prædita esse , ea ratione , quam paullo infra explicabimus ; ubi subjecta Figura aditus ad explicationem factus quodammodo sit.

Repræsentet itaque (*Fig. III.*) P E *p e* P Meridianum circulum, P *p* Terræ Axem, E *e* AEquatoris diametrum , *c* Terræ centrum, L V circuli ad AEquatorem Paralleli diametrum, quæ producta ex V in B intelligatur . Tum ponamus, nullam esse centrifugam vim; & in Hæmisphærio F *p e* V partes esse densitatis inæqualis, ejusque ut virium proficiscentium ab ejusdem Hæmisphærii partibus , præditarum intensionibus variis pro distantiis variis a puncto V , summa ejusmodi sit, quæ agens in corpus , cujus centrum in puncto V, directionem ipsius corporis constituat per lineam V K.

Deinde vero fingamus accedere vim centrifugam, impellentem corpus V per lineam V B : ab hac sane vi commutabitur directio illa , evadetque per lineam V D diagonalem Parallelogrammi V K D B , in quo (ut ex mechanicis theorematis notum est) ratio lateris V K ad latus V B eadem sit , ac ratio vis tractionis proficiscentis ab Hæmisphærii partibus est ad centrifugam vim .

Quod si Hæmisphærii F E P V partes itidem sint densitatis inæqualis, ejusque ut summa virium agentium in corpus V, conspiret ad ipsum adducendum per

lineam V R : atque vis hæc per V R ad illam attrahentem corpus idem per V D sit ita attemperata, ut si prima repræsentetur per lineam V S, altera per lineam V *x*, compleaturque Parallelogrammum, Parallelogrammi hujusce diagonalis sit V *c* A, transiens per centrum *c* : jam hac ratione apparebit, gravia cadentia dirigi (ut fieri oportere dictum est superius) ad angulos rectos in Telluris superficiem, & centrifugam vim extingui; nec fieri posse, ut ob vim eamdem Maria intumescant, neque ut ab eorum tumore sphærica Telluris forma depravetur.

Atque hæc ea sunt, quæ ad sphæricam Telluri formam conservandam facere posse existimavi. Sed ea indicavisse satis est. Porro a nonnullis calculis, quos de re eadem inieram, abstineo; proponere enim res illas, neque ulterius progredi in animo fuit : quas equidem proponi posse ratus sum. Posui strata densitatis inæqualis: cum enim Telluris partes a superficie remotiores quibus proprietatibus præditæ sint, experientia nulla nos docuerit; earundemque indolem ideo certa ratione haudquaquam posse definiri, qui Geographiæ physicam partem coluerunt, affirment: liberum quidem visum fuit de iisdem conjectare. Atque si a doctissimis Viris positum est; „ Tellurem „ magis densam esse ad centrum, & adiectam ma„ teriam haberi posse pro corpore separato; „ id enim commodum erat ei, quam sibi proposuerant, Telluris formæ; quidni licebit mihi quoque densitates in iis partibus collocare, in quibus possint positæ a me formæ ancillari ?

Et quod attinet ad gravitatis vim ab attractionibus materiæ petitam, quæso patiaris, Vir Doctissime, ut conjecturam quamdam, quæ huic sententiæ favere videtur, ut in mentem venit, exponam. Pro certo

certo habeo, Naturæ propositum esse, ut diutissime princeps quodcumque corpus conservetur: Tellus nimirum, Sol, Luna, & reliquæ Stellæ; addatur etiam Saturni Annulus. Iis autem corporibus, quæ globosa sint, atque rotunda, satis quidem prospectum esse videtur, indito singulis centro; ad quod, quæcumque vi aliqua separentur, partes connitantur. At Annuli, sive „ Fornicis Saturno circumdati „ (solidum enim Annulum esse, non Satellitum coronam, constans ejus forma mihi penitus persuadet) sejunctæ partes quo dirigi debeant, non apparet: quando enim ad Stellæ Saturni centrum contenderent, earum directio ad ipsius Annuli exitium & perniciem plane vergeret. Quod si corpora in se mutuo gravia esse ponamus (quemadmodum a multis doctissimis Viris poni, ante narravimus) inde intelligemus, ex mutua materiæ attractione non modo sphærica corpora conservari, verum etiam Fornicis illius partes ad Fornicem ipsum referri: quamobrem percipere facile poterimus, qua ratione conservationi singulorum principum corporum Natura providerit.

Hoc autem loco, si quis valeret admirabili illa eloquentia, & utili lepore, non modo in seriis rebus, verum etiam in jocosis, doctissimi Auctoris perelegantium Dialogorum, quibus titulus est, „ de Mundorum Multitudine; „ postquam animadversum esset, corpora aliqua satis erecta ubique in Annulo insistere posse, is ansam teneret renovandæ, joci caussa, quæstionis illius; num scilicet essent in Annulo constituendi ..... nosti reliqua.

Sed longior nullo modo esse debeo in hujusmodi rebus, quæ ad fabellarum genus sunt referendæ: quod autem pertinet ad res ceteras, quas hisce mandavi litteris; num in iis aliquid sit, quod lucem

mereretur, Tu, Præstantissime Vir, ea, qua polles summa Physicarum Mathematicarumque rerum peritia perspicue videbis. Vale.

Patavii. III. Non. Novem. CIↃIↃCCXXIIII.

Obser-

Observatio Defectus Lunæ, qui contigit pridie Kal. Novemb. CIↃIↃCCXXIIII. *habita Patavii.*

Tem. appar.

H.	′	″	
15.	18.		Per nubes pauxillum translucidas visum plane est, Lunam jam cœpisse obscurari.
	31.	33.	Per nubes paullo rariores umbra visa est distare a Mari Serenitatis diametro majore Grimaldi; minus autem a Galileo.
	36.	9.	Per similes (ut etiam contigit in quattuor subjectis Phasibus) nubes, visa est umbra attingere Mare Serenitatis.
	49.	37.	Visa est umbra appellere ad Plinium, & a Grimaldo distare diametro minore hujus maculæ.
	52.	55.	Vmbra visa est distare a Mari Crisio paullo minus transversa hujus diametro, & Grimaldum quasi attingere.
	55.	10.	Visa est distare a Mari Crisio minus diametro majore Grimaldi.
16.	2.	55.	Videbatur attingere Grimaldum, & Crisii Maris partem dimidiam obtegere.
	18.	28.	Per nubes aliquantulum densiores umbra non magno intervallo a Pitato distare videbatur; nimirum distantia pauxillo excedente illam, qua Pitatus a Tychone disjungitur.

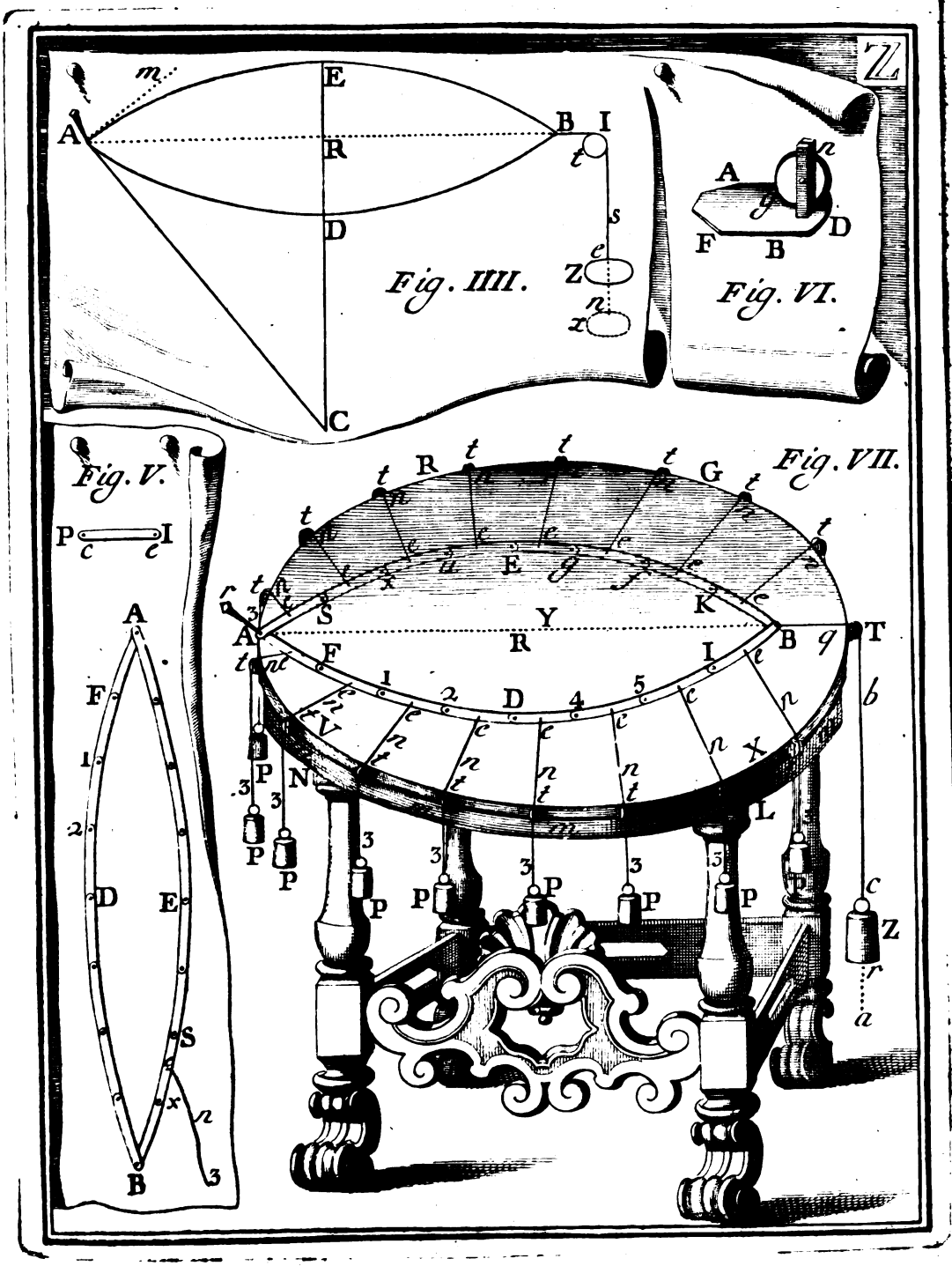
21. 40.

Tem. appar.

H. / //

16. 21. 40. Per nubes denſas, ut vix per eas tranſpici poſſet; magiſque ampliaretur, vel ante moleſta, confuſio termini umbræ; dimidium Maris Nubium, dimidiumque Maris Nectaris, quaſi ipſius umbræ laciniæ duæ, ultra umbram procurrere videbantur.

Tum vero plures coactæ nubes ita concrevere, ut opacæ omnino fierent; neque ulla deinceps Lunæ ſpecies apparuit: ex qua, ſaltem æſtimatione quadam, quemadmodum ante factum fuerat, notitia aliqua itineris umbræ, Lunæ diſcum (ut ita dicam) peragrantis, haberetur.



VIRO CELEBERRIMO
ABBATI GVI. GRANDO

Ioannes Polenus S. P. D.

CONstitueram jamdudum animo, plura de Musculorum Motibus scribere; at, non una de caussa, cogitatio hæc aut deponenda, aut certe in aliud tempus differenda est. Nonnulla tamen, quæ in hunc finem jam digesseram, nunc edam: non in usum (quod optime novi) doctissimorum Hominum, Tuique, Vir Præstantissime, similium: verum, ut Tu, iidemque videant, num hæc ipsa alicui utilitati esse queant illis, qui mediocriter tantum sint in rebus hisce versati. Neque enim ea, in quibus aut nulla, aut exigua ingenii laus esse potest, semper cum nulla, aut cum exigua utilitate conjunguntur.

Principio, quoniam mirabar esse aliquos, qui sanguinem solum musculis contrahendis sufficere, plane defenderent; iccirco contrarium demonstrare (quod a nemine, quantum scio, factum est) mechanica ratione aggrediebar. Itaque constituebam duo ex mechanico penu desumta axiomata. Primum hujusmodi: nullum corpus a quiete ad motum transit, nisi a moto alio corpore motionem recipiat. Alterum: si uni corpori vires, propter quas moveri debeat, ab alio corpore imprimantur, quantum virium illud recipit, tantundem hoc amittit: quare poni nequicquam potest, illud plus, quam hoc haberet, virium accipere.

Porro sanguis, qui pervenit in ventriculum cordis

 finis-

ſiniſtrum, quando in eo eſt, in quiete veluti eſt; neque ullum habet principium motus, a quo per arterias ferri cogatur. Ergo ſi tunc a ſanguine acquirendæ ſunt vires, quibus ex cordis ventriculo in arteriam magnam, & inde per alias arterias in omnes animantis partes diffundatur, vires illas ab aliorum corporum motibus (ut principium primum ſuperius allatum fert) recipiat neceſſe eſt.

Corpora autem, quæ conferunt hujuſmodi vires ſanguini, ſunt muſculi (ſanguinem a fermentis non impelli, plures ex doctiſſimis Anatomicis ſatis oſtendere) nempe cor, qui muſculus eſt, & carneæ annulares fibræ tunicæ muſcularis arteriarum. Conſtrictione enim ſiniſtri ventriculi cordis ab ipſo ventriculo ſanguis expellitur, vireſque primas ſuſcipit, quibus per arterias cieatur: conſtrictione itidem annularium fibrarum muſcularis tunicæ novis deinde viribus inſtruitur, quibus ulterius, vel per anguſtiſſimos ductus, urgeatur. At illud animadvertere hic præſtat, motus ſanguinis per arterias, ob frictionem ad internos earundem parietes (prætermitto gravitatem, quæ retardationis cauſſa alicubi eſt, alibi vero accelerationis) ex parte extingui; ſummamque motuum imminui.

Liquet igitur inde fieri oportere, ut ſumma reſiduorum motuum ſanguinis per arterias acti minor ſit, quam ſumma motuum neceſſariorum in muſculis iis, a quibus ſanguinis ipſius motio per arterias promanat. Ergo reſidui illi motus ſanguinis per arterias, ſi iterum muſculis iſtis communicentur, tanti eſſe non poterunt, quantis indigent hi iidem muſculi ad munera ſua obeunda. Et, quod conſequitur, ſolus ſanguis potis haudquaquam eſſet contrahere muſculos cordis, & arteriarum: alioquin hi muſculi

(contra

(contra ſecundum jam aſſumtum principium) plus virium ad motum a ſanguine acciperent, quam haberet ſanguis motum producens. Quamobrem datum eſt concludere, ſanguinem ſolum multo quidem minus ſufficere ad motus omnes muſculorum producendos, cum naturales, tum illos, qui a voluntate jubentur.

Cum vero propoſitum mihi eſſet, ea, quæ in ſuo quæque genere excellerent, ad inſtitutam tractationem facientia, quoad poſſem, proferre: plane vides, me nullo modo prætermittere debuiſſe utiliſſima illa Problemata, quæ circa Muſculorum motus elegantiſſime ſoluta dedit Vir Summus Ioannes Bernoullius in ſua de Muſculorum Motu Diſſertatione. Animum autem advertebam ad eos quoque doctiſſimos Viros, qui hac ætate conſtituunt; quamcumque Naturæ legem ſæpius repetitis Experimentis conſtantem inventam, ceu omnino certam ratamque poni poſſe. Enaſcitur enim id argumentum, quo ex ſimilibus ſingularibus multis exploratis atque perſpectis univerſale aliquid, propter ſimilitudinem captans aſſenſionem, infertur. Et hoc quidem modo multa hercle egregia Newtonus Vir Summus, multa Mariottus, multa alii celebres Viri præſtitere. Multaque nuperrime Doctiſſimus s' Graveſande, qui diligentiſſimam, utiliſſimamque navavit operam, ut Experimentis plura probaret, quæ geometricis ratiociniis jam demonſtrata habebantur. Quorum veſtigia ſequens, operæ pretium futurum exiſtimavi, ſi Problemata illa Bernoulliana, ut ut optimo ratiocinio demonſtrata, adjectis etiam experimentis, atque ideo vel hac Naturam ſpeculandi ratione, illuſtrarentur.

De ipſis autem Experimentis antequam dico, definitiones nonnullæ ad rem facientes, ponendæ ſunt.

Sint itaque duo æqualia fila (*Fig. IIII.*) AEB, ADB (duas musculares fibrillas repræsentantia) quorum utrumque una extremitate fixum sit in A; & singula eorum puncta ab æqualibus viribus premantur intrinsecus, vel trahantur (quod perinde est) extrinsecus, ad rectos angulos ad ipsorum curvaturas, quas in AEB, ADB videre est. Alteris autem horum extremitatibus in B conjunctis, adnexum sit aliud filum BI*se*, trochleæ *t* impositum; ex quo dependeat Pondus Z: idque Pondus nominetur Resistentia. Deinde intelligatur, vires prementes, seu trahentes, evanescere; atque fila a pondere Z ita adduci, ut secundum unam eandemque rectam lineam AI accomodentur, quare extremum fili BI*se* punctum *e* descendat in *n*, pondusque Z in *z*. Linea *en* erit mensura altitudinis, ad quam vis intrinsecus premens, aut trahens extrinsecus, elevare poterat pondus Z tunc, cum fila curvari cogebantur. Hæc linea *en* Sublevatio Resistentiæ appelletur.

Duo illa fila AEB, ADB cum (quemadmodum diximus) curvata sunt ab æqualium virium tractione, vel pressione, Machinulæ vocabulo nuncupentur.

Pondus Z (ut jam innuimus) hoc est vis gravitatis, quæ in punctum B Machinulæ agit, appelletur Resistentia.

Angulus autem EAD dicatur angulus dilatationis Machinulæ: quare angulus EAR erit semiangulus dilatationis Machinulæ. Haberi autem debet angulus EAR idem, ac angulus *m*AR factus a linea *m*A tangente curvam AEB in A, & a recta AB ducta a puncto A ad punctum B.

Recta autem illa linea a puncto A ad punctum B, dicatur Machinulæ diameter. Et, si curva AEB sit arcus circuli, bissectus in E, ductique sint radii

AC,

AC, EC, erit arcus AE mensura anguli ACE, qui angulus æqualis est angulo facto a lineis *m*A tangente circulum, & AB circulum ipsum secante, ac subtendente arcum duplum ipsius arcus AE. Est etiam ejusdem anguli ACE, sive EAR, sinus rectus AR; hoc est dimidiata Machinulæ diameter AB.

Quod si ponamus fila AEB, ADB singula æqualia esse rectæ lineæ AI: evidens est; evanescente vi, ex qua curvatura oriebatur, filisque ad unam eandemque illam rectam lineam AI accommodatis, fieri oportere, ut filorum longitudo AI Machinulæ diametrum AB magnitudine excedat, atque excessus mensura sit linea BI: quamobrem BI erit differentia inter longitudinem diametri Machinulæ, & longitudinem alterutrius fili. Sed quanto intervallo punctum B versus I promovetur, tanto etiam descendit punctum *e*; ergo linea BI æqualis est lineæ *en*: hoc est, differentia inter longitudinem diametri Machinulæ & longitudinem alterutrius fili exæquat Resistentiæ Sublevationem.

Nunc venio ad res illas, quibus in experiundo usus sum. PI (*Fig. V.*) regula est ex orichalco, prope cujus extremitates duo insculpta sunt foraminula *c* & *e*; quorum centra distant inter se Pedis Parisiensis Pollicibus quinque, & quarta lineæ parte.

Sexdecim ejusmodi regulis, conjunctis ope teretium claviculorum per bina quæque foramina transeuntium, & laxos veluti nodos A, F, 1, 2, D, B, E, aliosque, ut in Figura apparet, efformantium, sexdecim (inquam) ejusmodi regulis composita est Perpetua (vocabulo hoc eam nuncupabo) Catena ADBEA. Spatio autem inter binos quosque nodos in duas æquales partes diviso, ut in regula S*x* videre est in *e*, in puncto divisionis foramine facto, per id transie-

transiectum est alligatumque filum fericum crassiusculum *en* 3.

A F B D (*Fig. VI.*) est lamella ferrea (cujus similes multæ habebantur) longa Pollices tres, lata paullo amplius duobus. Huic infixa sunt ad perpendiculum bina sustentacula ferrea Trochleæ *gn*, elaboratæ diligenter ex orichalco, cujus Trochleæ diameter linearum novem.

R G X L N V (*Fig. VII.*) est lignea Mensa. Hujus summa superficies R G X V ad Finitorem parallela posita est, figura accedente ad figuram circuli, cujus diameter trium Pedum & Pollicum octo. Ejus crassities æquabilis X L, V N Pollicum circiter trium: marginibus ad perpendiculum demissis, atque ita Mensæ ferme cylindracea figura. Est autem secundum crassitiem excavata crena *mmmmm*, in quam inseruntur laminæ subjectæ Trochleis (de quibus superiore in articulo verba fecimus) simili modo, ac Celeberrimus s' Gravesande, ut narrat in Physices Elementis Mathematicis, Art. 197., in re diversa usus fuerat.

Hisce ita comparatis, Experimentum hac ratione institui. Catenam perpetuam, de qua paullo supra dixi, Mensæ superposui (quare gravitate sua, quamvis parva, Experimentum perturbare non poterat) & clavo A *r* nodum ejus A Mensæ affixi. Ad nodum autem B, eo ordine sumtum, ut octo hinc, totidem illinc regulæ essent, adnexum est crassius filum B *q b c*, impositumque Trochleæ T, & ejus extremitati appensum Pondus librarum sexdecim (hoc est Resistentia) Z. Tum fila *en* 3 regularum A F, F 1, 1. 2, 2 D, D 4 aliarumque omnium imposui trochleis *t* in crenam *m m m* insertis ita, ut fila ipsa superficiem Mensæ ferme perstringerent. Deinde ad filorum extremitates Pondera P P, ut in

Figura

Figura, ſingula pondo dimidiæ libræ appendi ; trochleaſque *t* variis crenæ locis uſque adeo aptavi, quoad fila ſingula *en* cum ſuis regulis angulos formarent rectos A*en*, F*en*, I*en* & ſic porro; ac punctum A, Menſæ centrum Y, punctum B, Trochleæ ſummum T in una eademque recta linea exiſterent; fieretque perfectum æquilibrium inter cuncta Pondera P (ſingulas Catenæ regulas trahentia ad rectos angulos) & hiſce Ponderibus reſiſtens Pondus Z. Mutatis autem Ponderibus P, varia habui Experimenta, quorum multis adfuit Vir Celeberrimus mihique amiciſſimus Io. Baptiſta Morgagnus in Gymnaſio hoc Primæ Sedis Anatomicus.

Poſt hæc Catenam aliam, priori illi ſimilem, niſi quod hujuſce regulæ dimidiam dumtaxat longitudinem regularum illius æquabant, faciendam curavi. Cum autem ſecundæ Catenæ regulæ triginta duæ eſſent, Catenarum ambitus inter ſe æquales erant. Hac quoque Catena adhibita, eodem prorſus modo regulis ſexdecim utrimque inter nodos A, & B relictis, Experimenta inſtitui.

Id autem, quod primum exploratum eſt, fuit magnitudo angulorum A S*x*, S*xu*, *xu*E, *u*E*g*, aliorumque a binis quibuſque regulis comprehenſorum (excipiendos tamen eſſe angulos ad A & B nemo non videt) quos omnes inter ſe æquales inveni. AEquales pariter inter ſe eos comperi in Experimentis aliis: ac ſive majores eſſent, ſive minores; quam unus in unoquoque Experimento habebat magnitudinem, eandem ceteri quoque in Experimento eodem obtinebant. Manifeſtum autem eſt, in ſolo Circulo id contingere; ut ſi Polygonus æqualium laterum ei inſcribatur, anguli ab iiſdem lateribus comprehenſi ſinguli prodeant æquales; itidemque

rece-

receptum eſt, circulum ceu Polygonum perexiguorum laterum, æquales angulos comprehendentium, haberi poſſe. Hinc igitur, atque ex iis, quæ in Experimentis fuere obſervata, ſatis evidens fit; Catenæ (cujus extremitates diſtrahi nequeant) latera, ab æqualibus ponderum viribus ad perpendiculum tracta, poſitionem obtinere eandem, quam haberent lineæ æquales lateribus illis, circulo inſcriptæ. Itaque ubi concipiamus (ut concipere omnino debemus) quod octo lateribus, quod ſexdecim accidit, id plurimis etiam accidere neceſſario oportere: haud dubie concipiemus, fili quoque, in extremitatibus immobilis, ſingulas perexiguas partes (hæ vero pro perexiguis lateribus haberi queunt) ab æqualibus viribus tractas ad perpendiculum, ſeſe accomodaturas poſitione ſimili ei, qua regulæ in propoſitis Experimentis ſeſe accommodavere; hoc eſt, comprehenſuras angulos æquales; hoc eſt, filum imitaturum circuli curvaturam. Quemadmodum contingere oportere Celeberrimus Io. Bernoullius, calculis ſubductis, invenerat.

Hæcque non eo dico, quod ignorem, inter adhibitas catenas, & fila perfecte flexilia ſuum intereſſe diſcrimen: quis enim in rebus hiſce verſetur, idque ignoret? Sed ajo, licentia quadam phyſicas res tractantibus haudquaquam deneganda, poſſe omnino flexilia fila cum Catenis illis comparari: neque diſcrimen illud impedire, quin proxime ad veritatem poſſimus accedere.

Hic autem a propoſito paullum digrediens adjiciam; me, quæ prima a Ponderibus conſtituta fuere æquilibria, ſimpliciter in Adverſaria mea retuliſſe. Ceterum animadverti, ubi conſtitutum jam erat æquilibrium, id nequaquam ab exigua in Ponderibus

muta-

mutatione perturbari : neque rem secus se habere si pauxillulo punctum B versus T, aut versus A promoveretur. Cujusmodi rerum caussa adtribuenda est tum nodis, quorum claviculi regularum distractionibus premuntur arctius : tum etiam Trochleis, quæ contra suos axes a Ponderibus fila trahentibus urgentur. Quemadmodum in aliis Experimentis, ubi plures axes, nodi, trochleæ, atque similia instrumenta usui sunt (ut ut hæc artificiose & accurate sint elaborata) evenire experiundo comperi. Et nemo quidem foret (scio quid dicam) harum rerum bene peritus, qui hæc in Experimentorum narrationibus non exponeret diligenter ; si in caussa esse possent, ut Experimenta minus certa haberentur. At hæc quidem minoris momenti sunt: minoris (inquam) momenti, quotiescumque præcipua Experimentorum phænomena sæpius, recte, atque ordine vestigentur.

Nunc eo redeo, unde discessi, nimirum ad cognationem (ut ita dicam) inter filorum & catenæ curvaturas : atque postulo, ut quæ de filis dicta sunt, & quæ definitiones traditæ fuere, cum Figura IIII. ante oculos habebatur, eadem singula ad Catenam ADBE, diametrum AB, filum B*bc*, Resistentiam Z, transferre liceat. Postulo, ut Pondera considerari queant ceu Fluidum, quod intrinsecus Machinulam ad angulos rectos premat : perinde enim est, ut jam alias innui, sive tractio exerceatur extrinsecus, sive intrinsecus fiat omnino similis æqualisque pressio.

Post hæc Postulata, ut aditus pateat ad comparationem inter instituta Experimenta & Bernoullianos calculos, Problema hoc, quod Lemmatis instar esse debet, expedire necesse est. Nimirum rectificatione

posita dati Arcus circuli, ejusdemque Arcus longitudine in numeris expressa, datoque itidem in numeris Sinu recto, eidem Arcui respondente, quot graduum sit Arcus invenire. Id Problema ope alicujus seriei (puta ejus, quam Celeberrimus Io. Craig in suis de Calculo Fluentium Libris dedit, pag. 53.) confici posset. At pauci termini (quamvis ut convergant curetur) numerum satis aptum non exhibent; plures vero termini rem nimii laboris efficerent: quamobrem putavi, viam hanc in rei propositæ vestigatione deserendam.

Atque ideo, ut ad propositum pervenirem, ingressus aliud iter, Tabula usus sum, in qua ad singulos unius quadrantis Gradus Arcus respondentes divisos in partes 100000, & horum Sinus rectos, expressos per numeros partium Arcuum eorundem ex ordine posui. Vt, dato Arcu (aut Gradus unius, aut Gradum excedente) in 100000 partes secto, rectoque ejus Sinu dato in partibus iisdem, posset ex invento in Tabula Sinu respondens ad lævam Graduum numerus reperiri. Dato autem Sinu, & numero Graduum ei respondente, Radius Circuli facillime invenitur. Quod si propositus numerus in Tabula non appareret, inventis Sinibus tum proxime majore, tum proxime minore, possumus per partes proportione inventas (quemadmodum in similibus casibus assolet) numerum, prope verum, Graduum Minutorumque nanciſci.

Quæ Tabula cum etiam quibusdam aliis in rebus alicui fortassis usui esse queat, eique analogam usque ad tertium decimum Gradum dederit Celeberrimus Cassinus in Commentariis Regiæ Scientiarum Academiæ ad Annum 1719. pag. 156. iccirco Tabulam eandem integram subjeci.

TA-

TABVLA I.

GRADVS.	ARCVS.	SINVS.	GRADVS.	ARCVS.	SINVS.	GRADVS.	ARCVS.	SINVS.
1	100000	99994	31	100000	95191	61	100000	82150
2	100000	99979	32	100000	94881	62	100000	81595
3	100000	99954	33	100000	94562	63	100000	81033
4	100000	99918	34	100000	94233	64	100000	80464
5	100000	99873	35	100000	93895	65	100000	79888
6	100000	99817	36	100000	93548	66	100000	79306
7	100000	99751	37	100000	93193	67	100000	78717
8	100000	99675	38	100000	92828	68	100000	78123
9	100000	99589	39	100000	92454	69	100000	77522
10	100000	99493	40	100000	92072	70	100000	76914
11	100000	99386	41	100000	91681	71	100000	76301
12	100000	99270	42	100000	91281	72	100000	75682
13	100000	99144	43	100000	90873	73	100000	75057
14	100000	99007	44	100000	90456	74	100000	74427
15	100000	98861	45	100000	90031	75	100000	73791
16	100000	98705	46	100000	89598	76	100000	73149
17	100000	98539	47	100000	89156	77	100000	72502
18	100000	98363	48	100000	88706	78	100000	71850
19	100000	98177	49	100000	88248	79	100000	71193
20	100000	97981	50	100000	87782	80	100000	70531
21	100000	97775	51	100000	87308	81	100000	69864
22	100000	97560	52	100000	86826	82	100000	69192
23	100000	97335	53	100000	86336	83	100000	68516
24	100000	97101	54	100000	85839	84	100000	67835
25	100000	96856	55	100000	85334	85	100000	67150
26	100000	96603	56	100000	84822	86	100000	66460
27	100000	96339	57	100000	84302	87	100000	65766
28	100000	96066	58	100000	83775	88	100000	65069
29	100000	95784	59	100000	83240	89	100000	64367
30	100000	95492	60	100000	82699	90	100000	63661

Celeberrimus Bernoullius in laudata Dissertatione Tabulam exhibuit, in qua variis Gradibus Anguli EAR respondentes sublevationes Resistentiarum, Vires Fluidi prementis seu dilatantis Machinulam, mensuræquæ aliæ facientes ad hanc rem, consignantur. Cum autem Gradus Anguli EAR, qui fuere in nostris Experimentis inventi, in ea Tabula non sint, subjecimus quinque numerorum ordines inventos iisdem artificiis, quibus Benoullianos numeros con-

ſtitutos fuiſſe comperimus. Et hi a nobis poſiti Gradus reſpondebunt gradibus iis, qui uſui futuri ſunt cum inter calculos Bernoullianos atque Experimenta noſtra comparationem peragemus.

TABVLA II.

EXPERIMENTA.	POSITIS	1. Arcu E A, vel Ang. E A R, qui eſt ſemiſſ. E A D. Gr. M.	2. Longitudine Arcus A E, & Reſiſtentia Z in partes æqu.	ERIT	3. Radius A C, vel E C.	4. Sinus Rectus A R.	5. Sublevatio Reſiſtentiæ.	6. Vis ſuſtinens, ſeu requiſitæ firmitatis Fibræ Muſcularis.	7. Vis abſoluta elaſticitatis auræ motivæ (nempe Fluidi Dilatantis) quamproxime.	8. Vis elaſticitatis auræ motivæ (nempe Fluidi Dilatantis) qua premitur Machinulæ ſemilatus A E.
I.		13. 18.	100000		430784	99102	1796	51378	$\frac{1}{8}$ pau. pl.	11926
II.		25. 18.	100000		226467	96781	6438	55304	$\frac{1}{4}$ p. pl.	24420
III.		54. 25.	100000		105290	85629	28742	85928	$\frac{4}{5}$ p. m.	81613
IIII.		62. 0.	100000		92403	81587	36826	106502	$\frac{7}{6}$ p. pl.	115268
V.		74. 7.	100000		77298	74347	51306	182695	$\frac{11}{5}$ p. m.	236252

Hunc autem ad finem ut demum aliquando accedamus, animadvertere præſtat, in ſingulis Experimentis notum fuiſſe numerum regularum, ex quibus Catena AEBDA componebatur, notum quot libras penderent & Pondus, ſive Reſiſtentia Z, & cuncta Pondera P ſimul ſumta: tum me, adhibita Linea in æs inciſa, atque in minutiſſimas partes diviſa, menſum fuiſſe Diametrum AB; & hac collata cum longitudine Arcus AEB, eadem menſura menſi, inveniſſe *ar* Sublevationem Ponderis, ſeu Reſiſtentiæ Z: & ponendo, eundem illum Arcum AEB a nodo itidem A ad nodum B in partes 200000 (&, quod conſequitur, ejus partem dimidiam, nimirum

rum Arcum AE, in 100000 partes) esse divisum, ex inventis æreæ Lineæ partibus elicuisse quot ex illis 200000 partibus in Diametro AB, quot in ejus dimidia parte AR, quot in linea *ar* Sublevationis Resistentiæ continerentur.

Itaque ea, quæ, secundum hactenus relata, in nonnullis ex institutis Experimentis innotuere, in subjectam Tabulam conjeci; ut quæ ad Experimenta ipsa pertinerent, uno aspectu percipi possent.

TABVLA III.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
EXPERIMENTA.	Numeri Regularum, ex quibus componebatur Catena AEBDA.	Pondus sive Resistentia Z; Librarum	Summa omnium Ponderum Pertrahentium singulas Catenæ Regulas; Librarum	Catenæ Latus AEB, sive ADB; Partium	Ponderis, sive Resistentiæ Z Sublevatio *ar*.	Diameter AB.	Catenæ Lateris AEB, sive ABD, Pars dimidia AE.	Diametri AB, Pars dimidia AR.
I.	16	16	8	200000	1796	198204	100000	99102
II.	16	16	16	200000	6438	193562	100000	96781
III.	16	16	52 $\frac{1}{2}$	200000	28742	171258	100000	85629
IIII.	16	16	75 $\frac{1}{4}$	200000	36826	163174	100000	81587
V.	32	16	160	200000	51306	148694	100000	74347

Verum quolibet Arcu AE diviso in partes 100000, cum notum mihi esset quot ejusmodi partes contineret Sinus Rectus AR eidem Arcui conveniens, ope Tabulæ I. eliciebam quot Graduum Arcus AE, sive Angulus EAR deberet reputari. Itaque inveni, pro Experimento I. Angulum EAR reputandum, Gra. 13. 18′: pro Experimento II. Gra. 25. 18′: pro Experimento III. Gra. 54. 25′: pro Experimento IIII. Gra. 62: pro Experimento V. Gra. 74. 7′. Hujusmodi

modi autem Angulis convenientes, ſecundum Bernoullianos calculos, vires Fluidi dilatantis poſitæ ſunt in columella 8. Tabulæ II: cum in columella 2. Reſiſtentia diviſa ubique ſit in partes 100000.

Sed protinus ad Experimenta redeamus: in quibus ſingulis Reſiſtentia fuit Librarum 16; quæ ponatur (ut poſitum quoque eſt a Celeberrimo Bernoullio) diviſa eſſe in partes 100000. Quamobrem Pondera P (quæ ceu Vires Fluidi dilatantis conſiderari poſſe poſtulavimus) in Experimento I. cum octo libras æquaverint, Vis Fluidi dilatantis in eo Experimento tamquam partium 50000 debet reputari: &, quoniam Vis agens in Arcum AE eſt quarta dumtaxat pars integræ Vis, iccirco Vis Fluidi dilatantis, premens Machinulæ ſemilatus AE, partium 12500 habenda eſt.

Hac eadem ratione repertas Vires, ad Experimenta reliqua pertinentes, in ſubjectæ Tabellæ IIII.

TABVLA IIII.

EXPERIMENTA.	1. Anguli EAR ſingulis Experimentis reſpondentes, qui etiam in *Tab. II.* reperiuntur. Gr. Mi.	2. Vires Fluidi dilatantis inventæ ope Experimentorum, ratione expoſita ſuperius in Art. *Sed protinus*.	3. Vires Fluidi dilatantis inventæ ope calculi, ut videre eſt in *Tab. II.* colum. 8.	4. Differentiæ inter Vires inventas ope Experimentorum, inventaſque ope calculi, quamproxime exhibitæ.
I.	13. 18.	12500	11926	$\frac{5}{100}$
II.	25. 18.	25000	24420	$\frac{3}{100}$
III.	54. 25.	82031	81613	$\frac{1}{100}$
IIII.	62.	117578	115268	$\frac{2}{100}$
V.	74. 7.	250000	236252	$\frac{6}{100}$

columellam 2. conjeci: & in columellam 4. retuli Differen-

ferentias inter Vires inventas Experimentorum ope, inventasque a sæpe laudato Bernoullio ope calculi.

Quæ sane differentiæ, ut in Tabella ipsa videre est, exiguæ sunt: atque ubi ratio habetur eorum, quæ inter narrandum animadvertimus, ejusmodi consensus inter Experimenta & calculos apparet; ut Experimenta ipsa veritatem Problematum illorum de figura fibrillarum muscularium, ac de ratione inter vires dilatantes resistentemque, ostendere perspicue videantur.

Postremum, de Tabulis dicendi finem facturus, difficultatem quandam pertinentem ad methodum æstimandi vim requisitæ firmitatis fili, seu fibræ muscularis, propositam a Petro Antonio Michelotto Viro Celeberrimo, amico meo, in suis Animadversionibus ad Iacobi Keill „ Tentamen V. Medicum-Physicum, „ quod est de Motu Musculari „ (pag. 66.) hic non incommode attingam. „ Hærere „ (scribit ille, & recte quidem scribit) „ verb. gr. possent nonnulli „ (Tirones) „ vel excellenti ingenio præditi, in hoc intel- „ ligendo: nimirum existente angulo E A R (videatur Figura 5. & quæ ei respondet doctrina in Differt. Bernoul. de Motu Musculorum) „ vel E B R nullo; ideoque eti- „ am E B D nihilo æquali, potentiam sustinentem, seu „ vim requisitam firmitatis Fibræ muscularis inveni- „ ri = 50000. Videtur enim ejusmodi vim (quod „ æquet hanc fractionem Z x S Λ E B R : S Λ E B D = o) „ tum debere esse = o. Quis, quæso Tironum hunc „ sibi scrupulum eximere possit marte proprio? „ Tum docte indicat, vis illius inveniendæ methodum ex Hospitalii eximio Libro de infinite parvorum Analysi posse desumi. Sed qua ratione vis proposita definiri queat etiam sine differentiarum calculo, Iubet exponere. Nimirum, quoniam Resistentia = Z = 100000 dupla est ejus vis firmitatis, quæ constituitur = 50000,

erit

erit hæc ultima vis $= Z : 2$. Ergo demonstretur oportet, cum Sinus Anguli EBR $= o$, tunc esse $Z \times$ Sin. $\angle$ EBR : Sin. $\angle$ EBD $= Z : 2$. Sinus itaque illius anguli EBR ponatur $= x$, Radius circuli $= a$, & sumto Angulo duplo ipsius EBR, hujus Complementi ad semicirculum Chorda erit $= 2(aa - xx)^{1:2}$; atque ita prodibit ejusdem anguli dupli, hoc est anguli EBD Sinus $= 2x(aa - xx)^{1:2} : a$; quamobrem $Z \times$ Sin. $\angle$ EBR : Sin. $\angle$ EBD $= Za : 2(aa - xx)^{1:2}$; atque, cum Sinus $\angle$ EBR $= x =$ nihilo, fiet $Z \times$ Sin. $\angle$ EBR : Sin. $\angle$ EBD $= Za : 2(aa)^{1:2} = Z : 2$.

Verum sine ullo calculo potest id ipsum demonstrari. Quando enim angulus EBR nullus est; &, quod consequitur, reliqui etiam DBR, DAE, nulli sunt; tunc quidem duo fila ADB, AEB trahuntur ad perpendiculum a vi Z: &, quoniam actio reactioni æqualis semper est, tanta esse debet reactio firmitatis in filis, quanta est actio vis Z: sed fila sunt omnino similia & æqualia; ergo pars dimidia actionis vis Z sustinetur a filo ADB, pars dimidia a filo AEB. Firmitas igitur unius fili æquare debet dimidiam vim Z; quæ si $= 100000$, firmitas $= 50000$; hoc est firmitas $= Z : 2$.

Et hæc attuli ad eum finem, ut vel ab hoc exemplo perspicue appareret, maximum esse consensum inter analyticos Calculos & mechanica ratiocinia; si tum illi, tum ista recte diligenterque instituantur: sed hæc hactenus. Illud extremum. Ego, si qua a Te, Vir Doctissime, probari intelligam, eadem bonæ frugis esse arbitrabor. Vale.

Patavii. Kal. Decemb. CIↃIↃCCXXIIII.

IOANNIS POLENI

A D

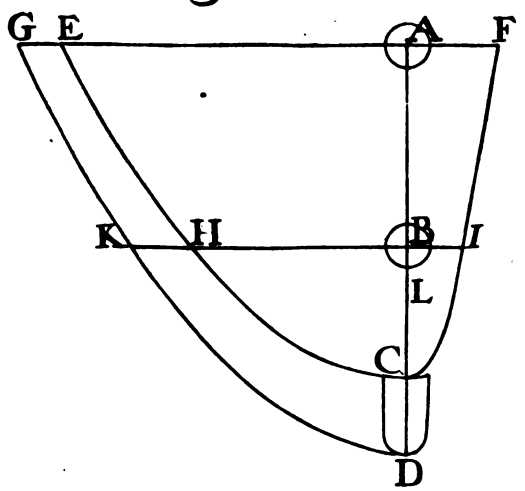
Nobilissimum Præstantissimumque Virum

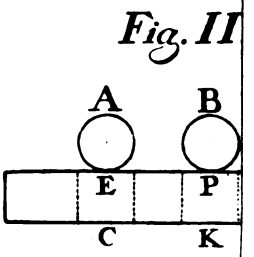
ABB. ANTONIVM CO. de COMITIBVS

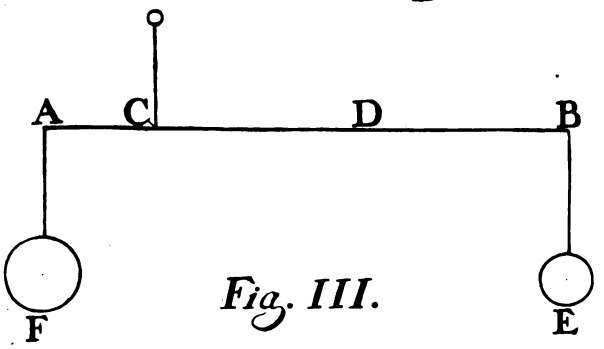
Patricium Venetum

EPISTOLA.

In qua agitur de Viribus Vivis motorum corporum ab Experimento æstimandis.







Nobilissimo Præstantissimoque Viro

ABB. ANTONIO CO. de COMITIBVS

Patricio Veneto

Ioannes Polenus S. P. D.

SI qua est de rebus naturalibus quæstio, cujus dissolutio Physicorum, idest speculatorum venatorumque naturæ, maxime intersit, ea certe est, in qua quæritur, sintne vires percussionum æstimandæ ex velocitatibus ductis in massas percutientium corporum, an vero ex velocitatum quadratis ductis in massas easdem. Quin immo compertum est, ut Tu Vir Præstantissime optime nosti, Mathematicos ipsos in Mixtæ (ut appellant) Mathesis tractatione versantes, derivantesque ex physicis fontibus bene multa Principia, non minus quam Physicos, propositæ quæstionis (ut ita dicam) difficultate torqueri. Cum autem cujuscumque physicæ quæstionis dissolutio vel ab auctoritate, vel a ratione,

vel ab experimentis proficiſcatur: jam quod attinet ad auctoritatem; tum incidimus in ea tempora, quibus auctoritati partes minimæ deferuntur: tum vero controverſia hæc tenet inter Viros ingenio doctrinaque adeo excellentes; ut, ſi attenta auctoritate res foret dijudicanda, fortaſſe difficilior ſuboriretur quæſtio, quibuſnam ex iiſdem doctiſſimis Viris auctoritas major tribuenda eſſe videretur.

2. Sequitur ut conſiderentur ratiocinationum momenta. At, cum ego adhibito dumtaxat experimento de quæſtione hac alias verba fecerim, quos mihi ipſe quodammodo circumdedi, cancellos non egrediar. Præſertim cum tam multa ab jam laudatis Viris in vulgus edita ſint, tam egregia ab eximio Mathematico conſcripta, & facile edenda, legerim, tam multa itidem ab aliis parari intelligam; ut alienas intrare provincias ferme crederem, ſi probabilia argumenta compoſitum aut collectum irem.

3. Vides itaque, Nobiliſſime Vir, illud unum mihi ſupereſſe, ut agam de experimentis; de quibus quod ſentio Tibi aperiam libere; neque enim aut peritiorem aut æquiorem judicem cupere poſſum, vel ſperare. Verum præſertim de meo agam experimento, in quo illud nova peculiarique ratione inſtitutum a me fuit; quod globi decidentes in ſubjectum gelatum ſevum, mole eſſent æquales, conſtarent autem maſſis (ſeu materiæ quantitatibus) habentibus reciprocam rationem altitudinum earum, ex quibus globi ipſi decidebant.

4. Quæ primum vidi ſcripta eo fine, ut infirmaretur concluſio, qua ex eodem experimento id confici ratus ſum, quod neceſſario conſequeretur: nimirum „ vires „ (ut in „ Libro de Caſtellis Art. 119. „ mandavi litteris) „ motorum corporum in

„ effe-

„ effectibus iis, in quibus producendis totæ consu-
„ muntur, esse in ratione composita ex simplici
„ corporum & velocitatum duplicata: „ ea extant
in Dissertatione illa Doctissimi Viri P. Francisci Cribellii; cui, „ delle Forze Motrici, „ hoc est, „ de
„ Motricibus Viribus „ titulus est, Tibique inscribitur. In ea, ubi ad rem propius accedit, ita habet: „ come esperimentorono primo il R. P. Maf-
„ fei, indi il Sig. Mar. Poleni „ &c.: hoc est:
„ ut experiundo tentarunt primum R. P. Maffe-
„ jus, inde Mar. Polenus „ &c. At certum est, atque in iis, quæ sequuntur, satis perspicuum, nequaquam in animo fuisse Viro illi honestissimo experimentum meum P. Maffejo tribuere: nihil enim affert, nisi quod pertineat ad corpora foveas percussionibus suis in materia molli efficientia; cum P. Maffejus id tentaverit (ut ante ipsum Ricciolius fecerat, quemadmodum in cit. Lib. Art. 117. jam scripseram) sed longe dispari diversaque ratione, ac ego feci: quippe qui id primus in hoc experimento curaverim, ut massæ decidentium corporum essent in reciproca ratione altitudinum, ex quibus deciderent; quoniam id, ubi in mentem venit, etiam totius rei caput esse posse, plane reputavi. Porro litteras quoque idem P. Cribellius ad me perhumaniter dedit, quibus testabatur, notum sibi esse, Maffejum modo diverso, ac ego feceram, tentavisse experimentum, addebatque, liberum mihi esse, easdem litteras (si luberet) edendi. Veruntamen nullo operæ pretio hic videar morari tua tempora, si pluribus hæc persequar, cum Tu una cum Cel. Bernardino Zendrino Serenissimæ Venetæ Reipublicæ Mathematico, utriusque nostrum amico, experimento illo Maffeji interfueris; atque

a Vo-

a Vobis (cum Maffejus nihil unquam de hujusmodi rebus ediderit) quam a meo diversum fuerit tentamen illud, alias mihi prorsus ignotum, non ita pridem intellexerim. Sed quæ ad historiam totius controversiæ Virium pertinent, summopere cupio, ut a Te (quemadmodum spes, neque levis, injecta est) discere possimus. Hactenus enim tam multis disceptationibus ex utraque parte res acta est, tamque sparsa sunt quæ ad quæstionem hanc pertinent; ut nisi prius in unum veluti corpus colligantur, nunquam possint optimo in lumine collocari. Porro Tibi eæ facultates omnes, quæ facere maxime queunt ad illustrandam rem cunctam, præsto sunt: ingenium præstans, præclara totius Mathesis doctrina, vetus controversiæ hujusce cognitio, longa cum doctissimis Viris tum domi tum foris consuetudo, & maxima veri videndi cupiditas, quæ ubi deest, frustra attinguntur Philosophicæ res.

5. Sed ad id descendam, quod majoris esse momenti censuit Cl. Cribellius; quodque (ut una lingua exprimantur cuncta) latine redditum, hujusmodi est: „ Globus quilibet a data altitudine decidens in corpus molle, efficit in hoc foveam, quæ semper altitudini, idest velocitatis quadrato, respondet; idque nascitur, quia illud tempus, quod corpus consumeret resiliendo usque dum vis extingueretur, idem ab ipso corpore impenditur in mollibus partibus dimovendis. Quapropter mirum non est, si vis dupla duplo tempore quadruplum edat effectum, & vis tripla triplo tempore effectum nonuplum edat. Et quoniam tempora in eadem sunt cum velocitatibus ratione, iccirco effectus, qui in ratione composita temporum atque velocitatum est, erit ut quadratum velocitatis.

6. Ar-

6. Argumentum hoc ut ut perpendas, certe constitues, eidem esse basi atque fundamento eam propositionem, ex qua fit; ut „ tempus quod corpus consumeret resiliendo usque dum vis extingueretur, „ idem ab ipso corpore impendatur in mollibus partibus dimovendis. „ Quæ propositio ita constituitur, quasi vera perspicue esset, neque validiore ulla probatione indigeret. Ego vero (si quid judico) reor, illam cum veritate non magnopere consentire. Porro si res ita se haberet, quemadmodum propositio illa fert, plane sequeretur, ut unius ejusdemque gravis, per constantem altitudinem libere decidentis, in subjecta variæ mollitiei corpora varias foveas temporibus omnino æqualibus efficeret. Namque si (caussa exempli) de altitudine duorum pedum caderet globus in densum sevum, foveam is faceret eo tempore, quo altitudinem pedum duorum resiliendo fuisset emensus: si deinde pari de altitudine decideret in corpus sevo denso mollius, itidem formaret foveam eodem temporis spatio, quo ad altitudinem datam pedum duorum potuisset resilire. Ergo densitas varia, & quod consequitur, varia resistentia subjecti corporis, haudquaquam mutaret tempus, quo globi decidentis actio absumeretur. Id autem cum mihi persuadere non possim, neque possum illam propositionem, ex qua proficiscitur id, comprobare.

7. Præterea vero, falsam esse, quæ priorem illam subsequitur altera propositio, dilucide apparere videtur, ubi in ejus vim, naturamque animus advertatur. Hæc ita habet: „ Quapropter mirum non „ est, si vis dupla duplo tempore quadruplum edat „ effectum. „ Ast propositæ rei natura plane ostendit, fieri nunquam profecto posse, ut ex velocitate

dupla

dupla duplo tempore adhibita quadruplus effectus edatur, nisi singulis temporis punctis eadem actionis velocitatis (aut eadem reactionis resistentiæ) quantitas æqualiter perstet. Quid enim per fidem tuam, Doctissime Vir, aliud est numerum binarium in binarium itidem ducere, ut quaternarius quadratus numerus procreetur, quid aliud, inquam, est, nisi binarium numerum integrum sumere bis? Et ratione omnino pari; quid aliud est, velocitatem duplam duplo tempore adhibitam edere effectum quadruplum, quid aliud, inquam, est, nisi integram illam velocitatem toties sumere, quoties temporis binario expressi ratio ipsa requirit? Verum luce meridiana clarius est, velocitatem non persistere toto tempore eandem (& perspicuum itidem, non eandem esse reactionis quantitatem quovis temporis momento) Concludamus igitur necesse est; id, quod ex ea propositione confici videtur, cum veritate haudquaquam consentire.

8. Facile itaque vides, illiusmodi argumentum, quo sententia nostra petita fuit, stare non posse, nisi verum sit, „ illud tempus quod globus consu„ meret resiliendo usque dum vis extingueretur, „ illud idem ab ipso corpore impendi in mollibus „ partibus dimovendis; „ quod in Art. sexto improbatum est: nisi præterea constet „ velocita„ tem „ (caussa exempli) „ duplam ad eden„ dum duplo tempore quadruplum effectum „ totam integramque permanere (vel saltem, singulis temporis punctis, resistentiæ eandem esse reactionem) at hæc constare non posse jam in Articulo superiore demonstravimus. Itaque caussa nulla esse videtur, cur propter argumentum illud recedere a pristina sententia debeamus.

9. Quæ

9. Quæ cum ita ſint, ſatis, ut opinor, factum erit etiam Clariſſimo Crouſazio, qui in Libro, cui titulum fecit „ (Eſſay ſur le Mouvement) Speci„ men de motus natura, „ proponit (pag. 171. Art. V. & VI.) valde ſimilia. Porro, ſi expendatur una dumtaxat ejus ratiocinii pars, facile exiſtimo; ob ea, quæ ſupra declarata ſunt, quid minus probandum videatur per ſe ſe appariturum.

10. Agit ille de duobus globis, quorum alter pondo ſit trium unciarum, alter unius: in ſubjectam vero argillam primus decidat de altitudine unius menſuræ, alter de altitudine menſurarum trium: quare velocitatem in fine liberi caſus a primo globo, jam argillæ ſuperficiem attingente, acquiſitam repræſentat numero hoc $\sqrt{1}$; velocitatem globi alterius itidem in fine liberi caſus repræſentat numero hoc $\sqrt{3}$. Tum vero ſuam conſtituit hypotheſim; cum tempora conſumta in effectionibus fovearum ut exhibeat, eoſdem illos adhibet numeros, quibus velocitates deſignaverat; atque ponit, tempus, quod in excavanda ſua fovea conſumit primus globus, exprimendum eſſe numero $\sqrt{1}$; tempus autem impenſum a globo altero exprimendum eſſe numero $\sqrt{3}$ (hoc eſt, tempus illud ad hoc eſſe ut $\sqrt{1}$ ad $\sqrt{3}$) Quibus aſſumtis, poſitiſque; ubi agit de altero globo unius unciæ, hæc (quæ viſa ſunt expendenda) ſubjungit: „ La boule 1 agit ſur „ la même terre glaiſe, avec une viteſſe $\sqrt{3}$ pen„ dant un temps qui eſt $\sqrt{3}$. Or $1 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$: „ hoc eſt „ globus 1 in eandem argillam agit velo„ citate $\sqrt{3}$ ſpatio temporis quod eſt $\sqrt{3}$. Igitur „ $1 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$.

11. Compendii cauſſa, nihil hic repetam de rationibus iis, ex quibus apparere dilucide poteſt, haud-

quaquam constare, numero $\sqrt{3}$ tempus esse exprimendum. Quid, quod præterea, vel me silente, nihil clarius, quam constitui illud minime posse, nimirum a globo „ in argillam agi velocitate $\sqrt{3}$ toto spa„ tio temporis, quod sit $\sqrt{3}$? „ Nonne velocitas illa, quæ principio quidem denotanda erat $\sqrt{3}$, deinceps jugiter ab argillæ resistentia imminuitur? Res hercle ex veritate tunc procederet, atque foret $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$, cum velocitas ab $\sqrt{3}$ repræsentata usque ad ultimum eadem atque integra permaneret. At ubi de proposito agitur experimento; qui fieri poterit, ut vel ultimo puncto temporis velocitas, quæ jam jam omnis extinguenda delendaque est, adhuc dum numero $\sqrt{3}$ exprimi queat? Similia etiam de eo loco, ubi agitur de globo unciarum trium, dici potuisse, perspicuum est.

12. Ni autem pessime fallor, experimento quoque veri inquisitio atque investigatio ulterius tentari potest. Hunc igitur ad finem curavi, ut de altitudine pedum quinquaginta demitteretur in subjectum gelatum sevum globus, cujus diameter duorum pollicum, pondus unciarum quinque. Dum globus hic quinquaginta pedes, a puncto quietis ad sevi superficiem, cadendo percurrebat, consumebatur tempus secundi (ut appellant) minuti unius, triumque circiter partium; quod tempus sensu ipso cernebatur, aliqua (ut ita dicam) extensione præditum: at foveæ in sevo effectio, qua globus perveniebat ad quietem, momentaria esse videbatur. Vt ut vero in perpauco perque exiguo tempore constitueretur observatio, ea tamen erat differentia, quæ non putabatur aciei visus errori tribuenda. Atque, ob id & ob naturam sollicitationum gravitatis, videtur fieri facile oportere, ut vix ullo virium incremento

a gravi-

a gravitatis ſollicitationibus, ſuas dum excavant foveas, globi augeantur. Lubens tamen ſtabo temporis æſtimationi, judicioque eorum, qui meæ contrariam tuentur ſententiam, ſi experimentum id velint diligenti animadverſione inſtituere.

13. Compleo hanc epiſtolæ partem, Tecum communicando quæ in litteris ſuis Comes Iacobus Ricatus, cujus in ſublimiori Geometria & mixta Matheſi doctrina eximia Tibi nota eſt atque perſpecta, mihi nuper ſcripſit de Cl. Crouſazii argumento illo, quod ſupra Art. 10. propoſitum eſt. Itaque Ricati verba ſubjeci:

14. I. „ Vt perſpicue manifeſtetur abſurdum, quod „ proficiſcitur ab hypotheſi arbitraria, cui argumen- „ tum, ſeu reſponſio, Cl. Crouſazii innititur; fin- „ gamus, globum minus gravem (*Fig. I.*) A decide- „ re de altitudine AC, & percuſſione ſua efficere „ foveam CD. Tranſeat per punctum A linea re- „ cta horizontalis GAF; atque ab ejuſdem lineæ „ parte AE repræſentetur tempus, quod conſumi- „ tur in deſcenſu globi A per AC; parte autem „ AF tempus, quod impenditur ab eodem globo „ A in perficienda fovea CD. Ex communi ver- „ tice C deſcribantur duæ Parabolæ CHE, CIF, „ tranſeuntes per puncta jam determinata E, & F.

II. „ Sumatur globus alter B gravior quidem, „ ſed diametri æqualis diametro globi A; atque ita „ collocetur, ut ſit ſublimitas BC ad ſublimitatem „ AC in eadem ratione, in qua maſſa globi A ad „ maſſam globi B; referciaturque prior fovea CD. „ Iam globus B decidens de puncto B efficiet fo- „ veam ſuam priori illi æqualem; quemadmodum „ tuum docet experimentum, & quemadmodum „ ipſe Cl. Crouſazius lubens admittit.

III. „ Sit in Parabola CIF Applicata BI respon-
„ dens Abscissæ BC; ajo, si responsio Cl. Crousa-
„ zii vera est, ab Applicata BI repræsentari tem-
„ pus impensum a globo B in perficienda sua fo-
„ vea CD. Quandoquidem (ut illi placet) tem-
„ pora a duobus globis A & B impensa in duabus
„ æqualibus foveis perficiendis, sunt in eadem ra-
„ tione cum velocitatibus, quas acquirunt iidem
„ globi decidentes, primus de altitudine AC, alter
„ de altitudine BC. Sed hæ velocitates rationem
„ habent subduplicatam ejus, quam obtinent alti-
„ tudines illæ: igitur temporum quoque eadem erit
„ subduplicata altitudinum ratio. Et, quoniam a
„ recta AF refertur tempus consumtum a globo A
„ in fovea sua perficienda, prætereaque (ob Parabo-
„ læ naturam) est $\sqrt{AC}.\sqrt{BC}::AF.BI$, sequitur,
„ ut ab Applicata BI tempus impensum a globo B
„ in perficienda fovea sua repræsentetur; dummo-
„ do tamen Cl. Crousazii hypothesis cum veritate
„ consentiret.

IIII. „ Hisce ita positis, vertice D, Axe DA, de-
„ scribatur tertia Parabola DKG, æqualis, sive (ut
„ melius dicam) eadem ac Parabola CHE; sed
„ quæ differat solummodo positione. Illud manife-
„ stum est (quando Applicatæ AE, BH repræsen-
„ tant tempora descensuum per AC, BC) si globi
„ A & B descendere pergerent per vacuum spatium
„ longitudinis æqualis CD sagittæ sive axi foveæ,
„ nullam omnino offendendo resistentiam; manife-
„ stum (inquam) est, futurum, ut a recta AG re-
„ præsentaretur tempus descensus per altitudinem
„ AD; a recta vero BK tempus descensus per alti-
„ tudinem BD. Itaque, subductis temporibus AE,
„ BH impensis in descensibus per AC, BC, jam
inter-

„ intercepta GE referet tempus consumtum a globo
„ A, decidente de quietis puncto A, dum percurret
„ per vacuum spatium, motu accelerato, interval-
„ lum CD; atque pari modo, intercepta KH refe-
„ ret tempus comsumtum a globo B, decidente de
„ puncto quietis B, dum percurret per vacuum spa-
„ tium, motu itidem accelerato, illud idem inter-
„ vallum CD.

V. „ Nunc in Axe AC determinetur punctum
„ B ita, ut intercepta KH evadat æqualis Appli-
„ catæ BI: quod obtinebitur modo hoc. Interce-
„ dat inter Applicatam AE, & Applicatam AF ea-
„ dem ratio, quæ inter quamlibet quantitatem n
„ & unitatem; atque fiat $1 + 2n.nn :: DC.CB$,
„ eritque B quæsitum punctum.

VI. „ Itaque Applicata BI refert tempus, quo
„ globus B, decidens de quietis puncto B, foveam
„ suam CD perficit; & intercepta KH repræsentat
„ tempus, quo idem globus B, decidens de quietis
„ puncto B, percurrit intervallum CD per vacuum
„ spatium, nullam omnino offendendo resistentiam.
„ Quoniam vero, ex constructione, æqualia sunt
„ tempora BI, KH, id sequetur; ut in casu utro-
„ que globus B effecturus sit iter CD æqualibus
„ temporibus; nimirum & quando descendet per
„ vacuum spatium motu libero atque accelerato,
„ & quando ob oppositionem cedentis subjectæ ma-
„ teriæ descendet motu retardato: id autem mani-
„ festissimum absurdum est.

VII. „ Et quidem, cum ad punctum C perveneri
„ rit globus B, jam insitus illi erit is determinatus
„ velocitatis gradus, qui descensui per intervallum
„ BC plane conveniet, & dum perget descendere
„ per vacuum spatium CD, velocitas ipsius jugiter

ab

„ ab accelerantis gravitatis vi augebitur: contra
„ vero cum necesse erit eidem globo B vince-
„ re subjectæ materiæ resistentiam, ipsius velocitas
„ in quovis intervalli CD puncto retardabitur:
„ Igitur in perficienda fovea CD impendere debe-
„ bit tempus majus; multo vero minus, si per li-
„ berum spatium cieatur.

VIII. „ Quin eodem modo ostendere (si luberet)
„ possem, fieri ut augeatur absurdum, si suma-
„ tur punctum L inter B & C; iterumque possem
„ evincere, quam falsam Cl. Crousazius assumserit
„ hypothesim in determinatione temporum con-
„ sumtorum in foveis suis perficiendis a duobus
„ globis A, B, quorum massæ in reciproca sint al-
„ titudinum descensuum ratione.

15. Hactenus autem de responsionibus ad argumenta illa, quorum inter principia multa est consensio. Nunc accedo ad alia, quæ in Transactionibus (ut nominant) Anglicanis mandata litteris sunt ab Henrico Pembertonio, cujus præstans de physicis mathematicisque rebus doctrina tum aliunde Tibi, Ornatissime Vir, cognita est, tum vero vel ex eo colligi facile posset, quod eundem Summus Vir Isaacus Newtonus Virum earundem rerum peritissimum appellaverit. Is ad Richardum Meadium Virum itidem Celeberrimum scribens, principio profitetur, probari sibi non posse, ut, attento meo experimento, statuatur; globos, qui cadendo in subjectam mollem substantiam, cum eandem ii inferant impressionem, eadem vi decidere debere; hinc enim confirmatur Leibnitzii sententia: se vero contra existimare, eodem illo experimento, Leibnitzii sententiam posse refelli. Subdit, mirari se, in suspicionem nullam me inductum

fuisse,

fuisse, cum viderem, consequentiam illam ab experimento meo sumtam adversari principio Philosophiæ, experimentisque ab Isaaco Newtono commendatis: quod sane principium fundamentum præcipuum sit ad phænomena omnia, hactenus observata in corporum motionibus, explicanda.

16. Mihi vero (ut ingenue dicam; quemadmodum & semper decet, & maxime quidem si agatur cum Viro sapienti) adhuc videtur illud faciendum plane fuisse, ut ab effectibus de caussis judicium ferrem; atque, cum impressiones fierent æquales, vires etiam comprimentes æquales esse, concluderem. Num vero concludi possit, experimentum meum sententiæ Leibnitzii adversari, dispiciemus infra. Nunc illud ajo, Virum Summum Isaacum Newtonum tanti a me fieri, ut quotiescumque ejus præclara inventa celebrandi occasio ferat, quemadmodum semper antea feci, concessurus nemini sim. At nihilominus licet aliqua in re dissentire; præsertim cum opiner, alio ducere pleraque illius experimenta, alio meum hoc. Quin iis positis, quæ mihi cum experimento convenire videntur, principiis (ut de me sileam) Viri Celeberrimi, Io: Bernoullius, Chr. Wolfius, Iac. Hermannus, & G. Iac. Gravesandius (plura quilibet elegantia suppeditantes) varia constituerunt ad motiones corporum se se percutientium spectantia Theoremata, jam receptæ percussionum doctrinæ consona: primus in Dissertatione edita anno 1727.; alter in Mechanica pag. 630; Hermannus in Phoronomia pag. 119; & Gravesandius in Dissertationibus insertis Parti primæ Tomi duodecimi Ephemeridum Litterariarum anni 1722. pag. 1. & 190.

17. Sed pergit inde Doctissimus Auctor; atque ita

ita definit: si diligentius inquiramus, effectum hunc quoque eadem regula Newtonii (nimirum, ut vires sint in eadem ratione cum massis ductis in velocitates) contineri inveniemus. Tum nonnulla perite subjicit de experimentorum usu, statuens, ad quodvis consequens ratiocinatione ab experimentis recte eliciendum, experimentorum proprium usum in primis determinari oportere. Postea vero ait, secus factum esse in experimenti mei usu; quandoquidem id experimentum aptius sit ad nos edocendos de lege, qua cedentes substantiæ motui corporum in ipsas decidentium resistunt, quam ad determinandas illorum corporum vires.

18. Itaque ab eo Propositio affertur (Scripti ejus hæc princeps pars est) novam continens resistentiarum Theoriam, qua de viribus prior illa antiqua sententia cum experimento meo concilietur. Ea propositio (quam tamen Tu nativis verbis expressam legere optime posses) de Anglica lingua in Latinam, una cum subjecta demonstratione, conversa ita habet:

19. „ Quod ab hoc experimento „ (nimirum a meo illo haud semel indicato) „ ostenditur, hujus-
„ modi est. Si duo globi, motu præditi, portiones
„ æquales cedentis substantiæ premant; resistentia,
„ qua globorum motui substantia illa obsistit, erit
„ eadem ad utrumque, quomodocumque differant
„ velocitates, quibus globi ipsi moventur. Id autem
„ ita demonstratur.

20. I. „ Sint A & B duo globi ejusdem magnitu-
„ dinis, sed diversi ponderis, æqualiter intra mol-
„ lem substantiam immersi. Ponamus, velocitates,
„ quibus globi præsenti in positione moventur, es-
„ se reciproce in subduplicata ratione ponderum
eorun-

„ eorundem : nimirum rationem ponderis globi A
„ ad pondus globi B esse duplicatam rationis, quam
„ habet velocitas globi B ad velocitatem globi A.

II. „ Quoniam vero ratio quantitatis motus in
„ globo A, aut vis qua globus hic movetur, ad
„ quantitatem motus in globo B, aut ad vim qua
„ hic alter globus movetur „ (ratio, inquam, hujus-
modi) „ componitur ex ratione ponderis globi A
„ ad pondus globi B, & ex ratione velocitatis glo-
„ bi A ad velocitatem globi B; iccirco vis, qua
„ globus A movetur est ad vim, qua movetur glo-
„ bus B, ut e converso velocitas globi hujus B ad
„ velocitatem alterius globi A.

III. „ Verum si globorum motus eandem patian-
„ tur resistentiam, dum globi ipsi portiones æqua-
„ les cedentis substantiæ premunt; effectus hujusce
„ resistentiæ, usquedum globi subjectam cedentem
„ substantiam profundius penetrant, erunt propor-
„ tionales temporibus iis, quibus globi per spatia
„ illa moventur, hoc est, quibus illa agit resisten-
„ tia, si considerentur hæc eadem spatia dum na-
„ scuntur, nimirum in prima ipsorum origine.

IIII. „ Ergo hujusce resistentiæ effectus erunt sin-
„ gillatim reciproce proportionales velocitatibus
„ utriusque globi : ac momentanea jactura virium
„ globi A ad momentaneam jacturam virium glo-
„ bi B se habebit ut velocitas hujusce globi B ad
„ velocitatem illius globi A.

V. „ At demonstratum jam est, hanc eandem ra-
„ tionem interesse inter integram vim globi A, &
„ integram vim globi B; consequitur ergo, ut
„ hi globi, dum penetrant æqualia spatia intra sub-
„ jectam illam substantiam, amittant eas virium par-
„ tes, quæ proportionales sint suis viribus integris.

VI. „ Et ideo, si eorum velocitates sint aliquo „ tempore reciproce in subduplicata ratione ponde- „ rum; ita ut vires, aut gradus motuum, quibus „ globi ipsi cientur, sint reciproce proportionales „ eorum velocitatibus; vires, quibus cedentem sub- „ stantiam premunt, æqualibus impressionibus fa- „ ctis in substantiam eandem, in illa ipsa proportio- „ ne perseverabunt. Quamobrem in resistentiarum „ Theoria hic posita, quando tota vis totusque mo- „ tus globi utriusque omnino perit, hi erunt in- „ tra cedentem substantiam ad profunditates æquales „ immersi.

VII. „ Nunc, quia in Poleni experimento globi „ decidentes de altitudinibus, quæ ponderibus eo- „ rundem sunt reciproce proportionales, cedentem „ substantiam percutiunt iis velocitatibus, quarum „ ratio est reciproce subduplicata rationis ponde- „ rum globorum eorundem, atque effectus jugiter „ talis invenitur, qualis modo determinatus fuit in „ proposita a me Theoria resistentiæ: jam satis hinc „ evincitur veritas ipsius Theoriæ.

21. At quoniam fieri potest, ut Epistola hæc mea in publicam prodeat lucem: quæso nunc, ut liceat mihi (in gratiam eorum, qui vel Anglicam linguam penitus ignorent, vel ratiocinii texturam vestigare nolint) aliquantulum hic immorari; & Demonstrationem illam, subtili artificio a Viro Doctissimo concinnatam, analytica ratione explicare. Hac autem de caussa Demonstrationem eandem in Articulos varios partitus sum.

22. I. Globi igitur A pondus nominetur P, Globi B pondus nominetur p; velocitas Globi A appelletur V, Globi vero B appelletur u; Globi A vis dicatur F, Globi B vis f. Erit ex hypothesi (quæ

Art.

Art. 20. I. continetur) $u.V :: \sqrt{P}.\sqrt{p}$; & (quadrando) $P.p :: u^2.V^2$.

II. Ponamus (ut fert Art. 20. II.) vires motorum corporum æquales esse eorundem velocitatibus ductis in eorundem pondera : eruntque $F = V \times P$, & $f = u \times p$: quamobrem habebitur; $F.f :: V \times P.u \times p$. Et, cum sit (ut Articulus superior fert) $P.p :: u^2.V^2$, substitui possunt, loco quantitatum P & p, quantitates u^2, V^2; qua facta substitutione, habetur $F.f :: V \times u^2.u \times V^2$; & (dividendo per $u \times V$ utrumque terminum posterioris rationis) $F.f :: u.V$.

III. Vlterius, effectus resistentiæ substantiæ adversantis globo A dicatur E; resistentiæ substantiæ adversantis globo B dicatur e: tempus, quo agit (penetrando datum spatium) globus A appelletur T; quo agit globus B appelletur t. Modo, ut possimus id concludere, quod in Art. 20. V. aperte ab Auctore concluditur, nimirum, „ globos dum pene„ trant æqualia spatia intra subjectam cedentem sub„ stantiam amittere eas virium partes, quæ pro„ portionales sint suis viribus integris, „ res ita explicanda esse videtur. Quoniam resistentiarum effectus considerantur usquedum globi subjectam cedentem substantiam profundius penetrant: ponendo (*Fig. II.*) globi A penetrationem = EC; globi B penetrationem = PK = EC; Effectus resistentiæ adversantis motui globi A per EC ad effectum resistentiæ ejusdem adversantis globo B per PK, se habebit ut tempus, quo durabit actio illius resistentiæ, ad tempus quo durabit actio resistentiæ hujus: ergo effectus illius resistentiæ ad effectum hujus resistentiæ eandem habebit rationem, ac tempus, quo globus A movebitur per EC, ad tempus, quo globus B movebitur per PK. Ergo $E.e :: T.t$.

IIII. Nunc vero cum positum sit, minima spatia EC, PK peragrata a globis A & B esse æqualia: ut servetur ejusmodi æqualitas concipiendum erit, tempora esse in ratione reciproca velocitatum: hoc est, $T.t::u.V$: ergo erit etiam (per Art. superiorem) $E.e::u.V$. Et quia jacturæ virium respondent resistentiarum effectibus (si momentanea Iactura virium globi A dicatur I; globi B dicatur i) erit $I.i::u.V$.

V. Sed est etiam (ut fert Art. 22. II.) $F.f::u.V$; ergo $I.i::F.f$.

VI. Sive $I.F::i.f$. Atque hinc sequitur, ut tot requirantur jacturæ I ad æquandam consumendamque vim F, quot jacturæ i sunt necessariæ ad æquandam destruendamque vim f. Sed (ut ex Art. 22. IIII. colligere est) quælibet jactura virium in globo A producit spatium æquale spatio producto a respondente jactura virium globi B. Ergo aggregatum penetrationum spatiorum (sive fovea facta a globo A) conveniens omnibus jacturis I simul sumtis, erit æquale aggregato penetrationum spatiorum (sive foveæ factæ a globo B) convenienti omnibus jacturis i simul sumtis. Ergo foveæ factæ a globis A & B erunt æquales.

23. Atque hujusmodi est demonstratio Propositionis a Celeberrimo Viro traditæ, quam (præter rationes superius allatas) ideo etiam enucleavi diligentius, quia ipsius in hisce rebus peritiam maximi facio: prætereaque ratus sum, difficillimam quæstionis partem in eo positam, ut difficultas agnosceretur. Porro tota re diligentius expensa, id mihi ingerit ea in demonstratione difficultatem, quod ponitur in Art. 20. III: nimirum, „ si globorum „ motus eandem patiantur resistentiam, dum globi „ ipsi portiones æquales cedentis substantiæ premunt;

„ effe-

„ effectus hujusce resistentiæ, usquedum globi sub-
„ jectam cedentem substantiam profundius pene-
„ trant, esse proportionales temporibus iis, qui-
„ bus globi per spatia illa moventur, hoc est qui-
„ bus illa agit resistentia: „ unde illud, quod in Art. 20. V. legere est, „ consequitur; ut globi dum „ penetrant æqualia spatia intra subjectam illam sub-
„ stantiam, amittant eas virium partes, quæ pro-
„ portionales sint suis viribus integris. „ Mihi vero contra videtur, effectus illos, dum globi ipsi portiones æquales cedentis substantiæ penetrant, inter se æquales esse oportere.

24. Nonne enim ipsa in Propositione (Art. 19.) constituitur; „ resistentiam, qua globorum motui
„ substantia illa obsistit, esse eandem ad utrumque
„ quomodocumque differant globorum velocita-
„ tes? „ Non eadem est resistentiarum mensura
„ dum globi penetrant æqualia spatia? „ Qui igitur fieri poterit, ut constantis resistentiæ in spatiis æqualibus sint effectus diversi? &, quod idem est, qui fieri poterit, ut extinctiones virium globorum sint diversæ, differentesque a ratione resistentiarum illarum; a quibus tamen progignuntur? Non inter Axiomata ponitur, effectus viribus suarum caussarum proportione respondere? Non ea Naturæ Lex, quam Vir Summus Isaacus Newtonus optimo in lumine collocavit, ita fert, ut „ actioni contraria semper & æqualis sit reactio? „ quamobrem actio vis globi unius sit æqualis oportet reactioni resistentiæ; ac tanta vis globi ipsius destruatur, quanta est resistentiæ reactio. Verum hujusmodi resistentia, sive reactio, „ eadem ponitur ad utrumque globum; „ igitur plane sequitur, ut in utroque globo vires, quæ amittuntur in spatiis æqualibus penetrandis, debeant esse æquales.

25. Nec

25. Nec quidem reor; ea, quæ in Articulo superiore sum persecutus, posse ulla temporis consideratione infirmari. Velim etenim, illud diligentius animadverti tunc effectus caussarum esse quidem ut tempora, cum caussæ ipsæ, quovis tempore reproductæ, integræ perseverant. Ita si (exempli gratia) ea ponatur hypothesis, ut sollicitationes a gravitate oriundæ sint temporibus proportionales, effectus ejusmodi sollicitationum temporibus respondebunt: quovis enim tempore nova sollicitatio accedens efficiet, ut pro temporum ratione, etiam sollicitationum effectus progignantur. Secus autem res se habet, ubi caussa aliqua agit determinata, & quæ nullum a tempore suscipit incrementum: cujusmodi est resistentia, quæ globi motui adversatur; quippe quæ determinatam prorsus habet vis quantitatem. Vincatur hæc resistentia longiore tempore, vincatur breviore; non majorem reagendo edet effectum, non minorem, quam ipsius determinata vis (cujus momentaneæ extinctiones non reparantur) dare possit. Quæ vis, seu resistentia, cum „ eadem sit ad utrumque „ globum, eundem etiam in utroque globo edet effectum; hoc est æquales virium globorum gradus extinguet. Non vero eos gradus, qui eorundem globorum „ viribus integris „ sint proportionales. „

26. Vide autem, Præstantissime Vir, quam differant hominum opinationes. Opinatur doctissimus Pembertonius, a sua resistentiæ Theoria se tuto manuduci ad explicandum phænomenum fovearum æqualium; atque inde arguit (ut fert Art. 20. VII.) „ satis hinc evinci veritatem suæ Theoriæ. „ Ego vero opinor, veritati minus consonam esse eam conclusionem Articuli 20. V., ad quam manuducit ejus

ratio-

ratiocinium, ejusque Theoria: atque ita arguo, satis inde evinci, aliquid humani in ejus Propositionem irrepsisse; neque ab ea Propositione infirmari id, quod, attento meo experimento, de vivarum virium natura olim constitueram.

27. Quæ tamen eo animo proposita a me sunt; ut, cum hæc de viribus quæstio perdifficilis perque obscura sit, agitatione ac disputatione facilior clariorque (si forte fieri possit) redderetur. Ceterum non is ego sum, qui doceri nolim, ne vincar. Quin, properans ad finem, qua de caussa superiora proposui, eadem etiam una de caussa exponam quid sentiam de iis experimentis, quæ a Clarissimis Viris Pembertonio, & Desagulierio in medium allata sunt, ceu meo illi adversantia.

28. Affert Pembertonius experimentum (cui simile in G. Iac. Gravesandii „ Physices Elementis „ Mathematicis, „ Tom. 1. pag. 39. Primæ Editionis legere est) globi, sive corporis alius figuræ, decidentis in unam Libræ extremitatem de variis altitudinibus, atque elevantis varia pondera suspensa de altera extremitate; quod experimentum ope cujusdam (ut appellant) elastri redditur accuratius. Observatur autem, si pondus de duabus differentibus altitudinibus decidat, velocitatem descensus per primam altitudinem ad velocitatem descensus per altitudinem alteram, esse in eadem proportione, in qua est pondus, quod primum elevatur, ad secundum elevatum pondus: si magnas tamen altitudines excipias. Ast pono, hujusmodi exceptionem non interesse, sed semper experimentum eadem felicitate contingere; nihilo tamen minus, quo magis rem considero (quin ut melius considerare possem, ego quoque rem experiundo tentavi) eo magis mihi

videor

videor persuaderi, experimenti illius effectus cum effectibus experimenti mei non esse conferendos; neque hercle experimentum utrumque quasi ejusdem speciei esse habendum. In meo etenim (quemadmodum in „ Libro de Castellis, „ edito, ante decem annos, Art. 94. 95. & 119. perspicue scripsi) illud mihi proposueram, ut vestigarem naturam virium vivarum, hoc est, „ virium motorum cor„ porum in effectibus iis, in quibus producendis „ totæ consumuntur. „ Quomodo autem ostendi queat in ictu globi decidentis in alteram Libræ extremitatem, vires globi (qui etiam facile resilit aliquantillum) totas consumi, plane non assequor: atque ideo non percipio, ut effectus fovearum æqualium, excavatarum a globis motum omnem omnino amittentium, cum hisce effectibus globi uno ictu percutientis Libræ extremitatem subsilientisque possint comparari. Neque Te latet, Vir Præstantissime, G. Iac. Gravesandium, Virum cum de Mathesi, deque optimo philosophandi genere meritum optime, tum vero in re experimentali sagacissimum, in secunda Editione primi sui Voluminis (an. 1725.) „ Physices Elementorum Mathematicorum, „ prætermisisse experimentum illud, quod principio hujusce Articuli indicavi; &, loco illius, aliud in eadem Editione secunda (pag. 147.) suffecisse, quod ei qualicumque difficultati a priore illo experimento proficiscenti prorsus satisfacere posse videatur. Id autem experimentum spectari velim considerarique diligenter.

29. At præterea refert Pembertonius tentamen aliud ad determinandam „ tenacitatem partium flui„ di „ a Io. Theophilo Desagulierio institutum; in quo „ ponebantur serica quædam vellera in pla„ na parallela extensa, quæ in distantiis æqualibus dispo-

„ disponebantur: deinde globus perpendiculariter in „ superius vellus incidebat, atque impingebat in „ ejusdem medium. „ Tum vero observationes disruptionum vellerum in usum transductæ ad resistentias determinandas. Sed animadvertere præstat (ne quidpiam dicam de aliis hujuscemodi motus affectionibus) corporum, quæ disrumpuntur, fibrillas prius tendi extendique, & tunc demum frangi, cum ipsarum extensio tanta est, ut major esse non possit, quamobrem si vis urgens pergat agere, diffractio consequatur, necesse sit. Quando igitur proposito in experimento globus in sericum vellus impingit, curvaturam in totum vellus inducit, fibrillasque omnes filorum extendit; disrumpit vero eas, quæ maxime erant extensæ. Atque hinc fit, ut ex harum disruptione de integra vi, qua egit globus judicium ferri non possit: cum pars illa, quæ disrupit fibrillas, appareat; pars, quæ tetendit extenditque alias, non appareat. Cum autem ego dumtaxat respiciam ad vires corporum in effectibus iis, in quibus apparere possit quomodo reapse totæ consumtæ sint; illiusmodi experimentum ad rem meam pertinere minime arbitror.

30. Transeo ad ea, quæ in Dissertatione sua (itidem in Transactionibus Anglicanis inserta) habet Desagulierius. Hic vitio illud mihi vertit, quod opitulari studuerim Leibnitzii sententiæ; „ neque tamen probaverim, falsa esse experimenta, quibus „ contrarium asseritur. „ At ille, quæso, duo animadvertat: primum nempe; elegantissima, accuratissimaque ejusmodi experimenta aut habita esse, aut certe prodiisse postquam ego scripseram: qui itaque fieri poterat, ut ego tunc attenderem experimenta, quæ tantum post aliquot annos innotescere mihi

 potue-

potuere? Alterum vero id est: visis etiam experimentorum descriptionibus, ab illo, & a Pembertonio sumtorum, haudquaquam futurum, ut eadem pro falsis reputare queam: tanti enim porro facio doctrinam, ingenium, fidem eorum, qui experimenta illa sumsere, ut omnino nulli dubio, suspicioni nulli locus sit. Ceterum in usu experimentorum, fateor, dissentio; quia sic mihi videtur: id autem nihil aliud est, quam libere philosophari.

31. Sed jam, primum propositum ab eo experimentum videamus. „ Sit „ (scribit ille) „ vectis (*Fig. III.*) „ AB, cujus hypomoclium seu centrum „ motus sit C, ita divisus, ut distantia AC sit quar„ ta pars distantiæ CB. Omnibus Mechanicis no„ tum est, pondus F centum librarum de puncto „ A pendens, ponderi E vigintiquinque librarum „ de puncto B pendenti æquilibrari „ (porro id quis neget? at non consentio, eam caussam esse, quam Auctor affert, dum subjicit id contingere) „ quia eo in situ pondus E quadruplo majorem ha„ bet velocitatem, quam pondus F. „ Non ignoro esse aliquos, qui doctrinæ vectium, ceu basi & fundamento, ponant principia hæc: quantitates motus esse massas ductas in velocitates; & æquilibrium fieri tunc cum, si vectis moveretur circum hypomoclium, eadem quantitas motus in ponderibus ad utramque vectis partem appensis nasceretur. Sed re diligentius perpensa, prorsus facio cum iis, qui cautius in principiis sumendis agendum esse rentur; atque ut caussam afferant æquilibrii seu in vecte, seu in Libra, ad unum gravitatis centrum respiciunt; statuentes, æquilibrium fieri, quando centrum gravitatis totius machinæ in directionis linea consistit. Cujus veritatis elegantissimam habet demon-

demonſtrationem P. Pardies in Statica ſua (pag. m. 144.) quæ ſane demonſtratio cum genuina eſt atque germana, tum nullo modo ex viribus ortis a velocitatibus pendet. Quamobrem ut propoſiti experimenti reddatur ratio, id inducere, quod in quæſtione quodammodo reperitur, opus non eſt; cum certa atque evidens cauſſæ illius demonſtratio aliunde proficiſcatur.

32. Pergit autem ille ita: quæ poſui vera ſunt, non modo in ſitu horizontali, verum etiam dum movetur Vectis, reditque ad horizontalem poſitionem; „ quia vires contrariæ & æquales tali poſitioni „ applicatæ ſe mutuo deſtruunt. „ At ego reſpondeo: quia, ubi Vectis de horizontali poſitione deturbatur, gravitatis centrum extra lineam directionis extruditur; quieſcere autem vectis non poteſt, niſi centrum gravitatis redeat in directionis lineam; hoc eſt niſi vectis iterum fiat horizontalis.

33. Demum ille concludit: „ quod ſi eſſent vires „ inter ſe ut maſſæ ductæ in quadrata velocitatum, „ pondus E vigintiquinque librarum ſuſpendi debe- „ ret ad punctum D, ideſt ad diſtantiam a puncto „ C ſolummodo duplam ejus, quæ eſt ponderis F „ ad idem punctum C. „ Id autem concludi modo aliquo poſſet, ſi ea, quam ille adſignat, æquilibrii cauſſa, ex natura virium a velocitatibus ortarum eſſet deſumenda: verum alia via, ut paullo ſupra oſtendi, incedendum eſſe, opinor.

34. Abſolutis quæ pertinent ad primum, provocat ad plura alia experimenta, ſed quorum bene multa referri queant ad illud globi decidentis in unam Libræ extremitatem; de quo ſatis jam in Art. 28. dictum eſt. Neque profecto quicquam video, quod me de priore ſententia debeat removere;

cum non videam id oſtendi, nimirum perinde eſſe, ſive globus decidens in mollem materiam, producendo foveam ſuam, proprias vires totas conſumat, ſive globus Libræ extremitatem uno ictu percutiat. Niſi hæc duo plane ſimilia eſſe comprehendero; valde dubito, quin concipere animo poſſim, conſequentias (ut ita dicam) ex illiuſmodi experientiis depromtas, conſequentiæ ab experientia mea proficiſcenti adverſari.

35. Vlterius vero autumat ille, me veritatem non eſſe aſſecutum, proptereaquod vires percuſſionum æſtimaverim ex impreſſionibus in molli ſubſtantia effectis. Atque adjicit, conſiderandum eſſe quomodo corpora æqualium virium, ſed inæqualium velocitatum, communicent motum ſuum terræ, ſi terra ſit mollis ſubjecta materia. Sed explicatio, quam ſubjecit, cum ſatis clara eſſe non videretur, ſimilitudinem adjungit (quam integram de Anglica lingua, ut alia, in Latinam converſam, non referre non poſſum) & ita perſequitur. „ Vt omnia „ majori in lumine collocentur, ponamus dari ja- „ nuam ſemiapertam, quæ libere circa cardines „ ſuos converti queat: ſi pilleola plumbea ex mi- „ nori bombarda emiſſa hæc janua impetatur, pil- „ leola januam penetrabit, neque janua de ſitu ſuo „ dimovebitur. Verum ſi lata quadam maſſa plum- „ bea utamur, hæcque eadem vi, qua pilleola præ- „ dita fuerat, in januam immittatur; janua ex ſua „ poſitione removebitur, atque ictu circa cardines „ ſuos convertetur: quoniam motus pilleolæ pau- „ cis januæ partibus communicatur in priore per- „ cuſſione, in altera vero per totam januam dif- „ funditur (Si in ea maſſa plumbea ſit pilleolæ „ illi æqualis prominentia, qua ſola percutiatur

„ janua

„ janua, nihilominus idem parietur effectus) „ Vt cognoſcatur, num vera ſit poſtrema hæc pars, quam ſignis Parentheſis clauſi ; cum plura data requiri, tum amplius diſpiciendum, exiſtimo. Quod autem pertinet ad reliqua ; porro illud ſatis intelligo, ſi pilleola & maſſa plumbea, vi eadem, in ligneam januam impingant, illa vero paucas ligni fibrillas urgeat, hæc multas, fieri poſſe, ut ab illa fibrillæ diſrumpantur, ab hac vero dumtaxat tendantur; atque ita plurimis tabulæ partibus motu communicato, janua circa cardines ſuos convertatur. At ad meum experimentum, ubi corpora impingentia in ſevum, & ſimillima ſunt, & prorſus æqualia, ut aptari poſſit ſimilitudo hæc, plane non percipio : quin credo, ſi experimenti illius mei circumſtantiæ ſingulæ cum ſingulis hujuſce experimenti percuſſæ januæ conferantur diligenter, facile appariturum ; ab hoc quidem non ſuppeditari novum modum, quo mei illius natura melius dignoſcatur : nec (quod conſequitur) quo nova naturæ illius proferatur explicatio.

36. Sed urget ille, novum a ſe excogitatum proferens experimentum. Quod cujuſmodi fuerit imaginatione concipies, ſi experimentum illud reſpicias, de quo in Art. 29. dictum eſt. Machinam enim conſtruxerat, qua firmiter detinebantur quædam chartæ parallelæ ad horizontem, certis æqualibuſque intervallis inter ſe diſtantes. In hæc, ut ipſius verbo utar, diaphragmata chartacea decidebat eburneus globus, cujus ictu diaphragmata nonnulla diſrupta penetrabantur. Narrat hic quæ in experimento obſervaverat; non ita quidem experimento meo adverſantia; poſtea vero concludit: „ quamvis prima fronte hoc experimentum Poleni Theoriam

„ con-

„ confirmare videatur; tamen, si rite perpendatur, „ ad id nihil quicquam conducere, intelligetur. Levior enim velociorque globus plures chartas penetrabat, non quia majori vi, aut majori motus „ quantitate præditus esset, verum quia singula diaphragmata dimidium tantum temporis habebant, „ ut resisterent globo impingenti dupla velocitate. „ Sed quid tempora ad resistentiæ vim illam determinatam? quantulocunque tempore superata fuerit illa resistentia, profecto tanta vis globi insumi debuisse videtur, quanta fuerit opposita resistentiæ vis. Huc autem iterum spectare possunt, quæ de resistentiarum reactione in Art. 25. dicta sunt. Atque animadvertendum etiam est, futurum fuisse ut experimentum hoc magis experimento meo responderet; nisi certe perturbari debuisset a tensionibus extensionibusque partium plurium non disruptarum; ut liquere facile potest ex iis, quæ supra in Articulo 29. proposui.

37. Fortasse tamen obscuritas aliqua irrepsit, proptereaquod in Vivarum Virium notione haud satis convenimus. Ille enim hæc habet: „ apud eos „ (qui suæ contrariam sententiam tuentur) „ Vis „ Viva nihil aliud est, quam ea, quæ effectus sensibiles producit, qualis est vis gravitatis, dum „ corpora in eorum descensu accelerantur. „ Non ita quidem ego: en etenim ut in Libro de Castellis Art. 94. & 95, Vires Vivas definiverim: „ Si aliquod corpus motum in aliud corpus agat, & „ agendo motum omnem suum consumat; id, quod „ effectum erit a corpore ita agente, appellabitur „ moti corporis Effectus Integer. Et caussa hujus „ effectus integri dicetur Vis Viva.

38. Quæ si attendere velit doctiss. Desagulierius, nul-

nullus dubito, quin consentiat; ultimum illud, quod affert, Experimentum „ globorum A & B, „ inter se conjunctorum filo, pertranseunte fo- „ ramen lævigatum, „ tractoque a pondere W, (quod tamen Experimentum integrum referre nimis longa res esset) nullus, inquam, dubito quin consentiat, Experimentum illud attentis circumstantiis, quibus motus ponderis W communicatur globis A, B, atque ab his recipitur, non pertinere ad Vires Vivas, neque meam ab eodem sententiam posse infirmari.

39. Quod sufficit indicavisse: si enim singula, quæ Cel. Pembertonius & Desagulierius habent, enucleate persequi voluissem, jam nimis crevisset epistola. Porro si illa, quæ fusius explicavi, vim aliquam habeant (habere autem plane opinor) contentus sum: sin vero fallor, neque habeant illa vim; frustra quoque reliqua fuissem persecutus.

40. Conatus mei ad veritatem perquirendam qualicumque eventu processerint; semper tamen verum erit, experimenta a Pembertonio & Desagulierio allata, vel ejusdem esse speciei cum meo (quod tamen mihi veri non videtur simile) vel non esse. Si hoc alterum; jam salva res est, neque enim a dissimilis speciei experimentis argumenta sumi possunt, quibus experimentum meum oppugnetur. Sin vero primum; jam, cum in ejusdem speciei experimentis reperiantur effectus utrique parti faventes; quid, quæso, aliud concludi poterit, quam amplexuro, attentis experimentis, alterutram partem, ancipitem reddi deliberationem?

41. Sed, ut de reliquis, ita de conclusione hac Tu videbis, Vir Præstantissime; qui pro summo ingenio tuo, proque singulari optimarum artium amo-

amore, rationum mearum momenta ut penſites, etiam atque etiam a me rogaris. Vale.

Patavii X. Kal. Iun. CIↃIↃCCXXVIII.

IOANNIS POLENI

AD

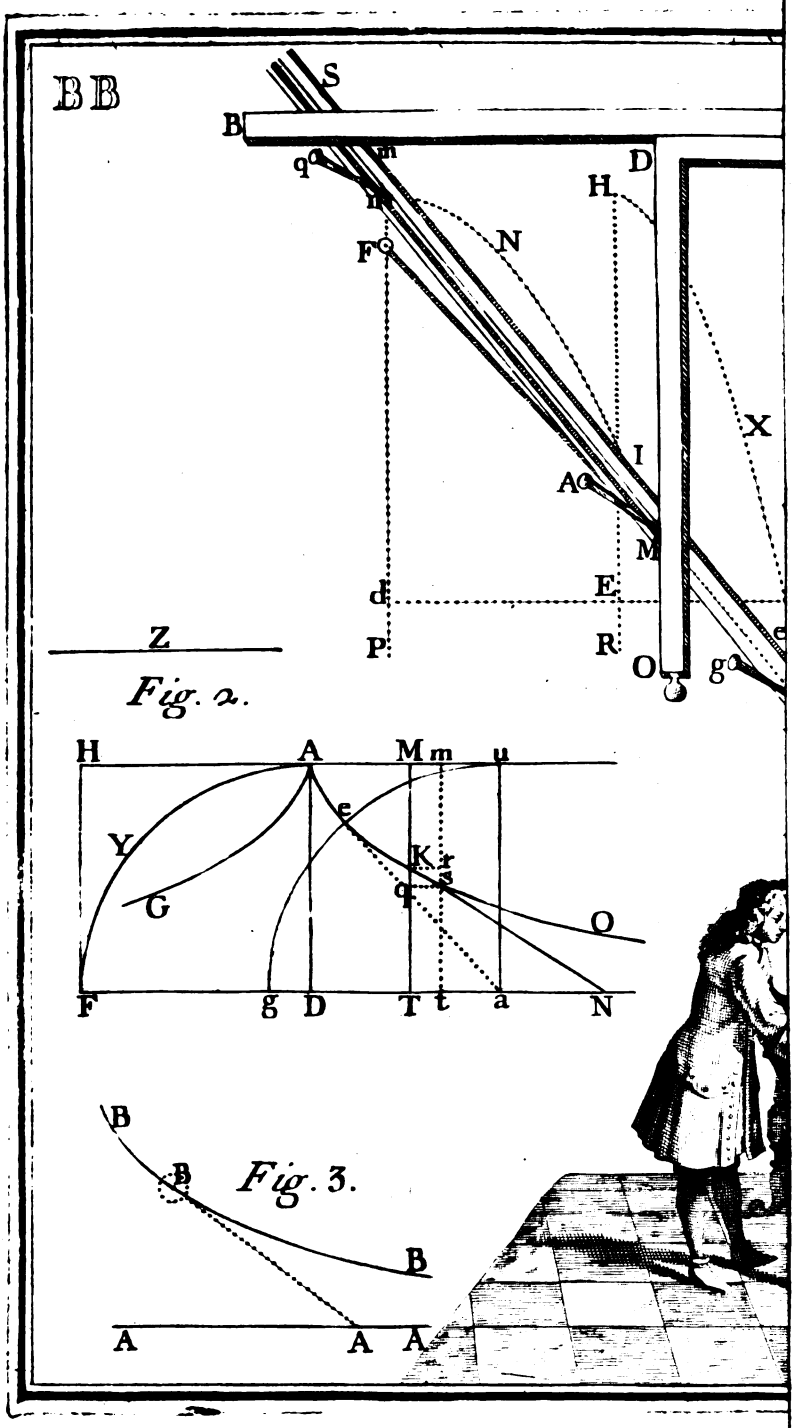
Virum Celeberrimum

IACOBVM HERMANNVM

Olim in Patavino Gymnasio, deinde in Viadrino, nunc in Imperiali, quæ Petropoli est, Academia, Matheseos Professorem eximium

EPISTOLA.

In qua agitur de Organica Curvarum Tractoriæ, atque Logarithmicæ Constructione. Accedunt Problematum ac Theorematum de Curva Tractoria, a Celeberrimis Geometris propositorum, Demonstrationes.



Viro Celeberrimo

IACOBO HERMANNO

Ioannes Polenus S. P. D.

CVM in ſermone, in quem ſuperioribus menſibus cum erudito Amico de Mathematicis Inſtrumentis incideram, hic Doctos Homines, qui eorundem deſcriptiones conjunctim atque ordine litteris mandavere, ac præſertim Cl. Bionium, jure & merito laudaviſſet; illud venit in mentem, non minori fortaſſis utilitate organa omnia ad Curvarum delineationem hactenus inventa, in unum veluti corpus apta compoſitione adduci poſſe. Ad quod præſtandum cum multa jam in adverſaria mea conferrem, pluraque etiam nova ſeſe mihi veluti obtuliſſent (ad quæ omnia in ordinem redigenda ac perficienda, tempus me inventurum ſpero, cupio quidem certe) illud mirari ſubijt, multa profecto ad Algebraicarum, ut appellant, Linearum deſcriptionem ſpectantia in

Geometrarum libris reperiri; vix autem quicquam, quod ad Transcendentes Lineas pertineat. Vix enim (fortasse poteram, ne vix quidem, adjicere) mentionem ullam invenies Organicæ Transcendentium Curvarum delineationis; si descriptiones peragendas Motu Tractorio excipias.

2. Itaque nonnulla, quæ vel hunc in finem comparavi, vel ferente occasione adjeci, ad Te (Hermanne Ornatissime) mitto, plane cupiens, ut expendantur judicio tuo, qui certum verissimumque hujusmodi rerum judicium habes, judicioque similium Tui.

3. Illud tamen principio animadvertam, inter Instrumenta ad Curvas describendas me non alia facile recipienda esse existimare, præterquam illa; quorum unumquodlibet lineas infinitas generis ejusdem describere queat, nec alterius cujusquam organi indigeat adjumento. Non secus ac (ut obvio exemplo utar) Circini sunt, quorum quolibet infiniti circulorum ambitus duci queunt. Quamobrem rotulam, cujus rotationis ope delinearetur Cyclois, inter germana organa haudquaquam ponerem; cum rotula una ad unam tantum Cycloidem delineandam usui esse possit.

4. Idemque ferme sentio de Instrumentis illis, quorum partes aliquæ, ut Curva gradus superioris progigneretur, movendæ essent per ambitum alius Curvæ datæ inferioris gradus; nimirum quia Instrumentum aliud requireretur ad hanc gradus inferioris Curvam delineandam: nisi ambo Instrumenta ita essent inter se conjuncta, atque coaptata, ut unum efficerent: superiorisque gradus Curva, una cum operatione ad inferiorem delineandam necessaria, unico continuo Instrumenti ductu signaretur. Dati

sint,

ſint, exempli cauſſa, vertex n (*Fig.* 1.) & focus F alicujus deſcribendæ Parabolæ; data ſit regula BC, norma GDO, filum FM, cujus altera extremitas fixa in puncto F; uno verbo dicam, datum ſit aptatumque id Inſtrumentum, quo Parabolicæ curvæ, trito jam artificio, deſcribuntur; hac una differentia; nimirum quod ſub regula BC, & norma GDO, regula alia (ſive canon) SnIeT libere moveri queat: id autem factu facillimum eſt. At regula hæc SnIeT in longitudinem a puncto M; uſque fere ad ſuperius extremum pertuſa ſit fiſſura latitudinis æqualis craſſitiei cylindrici ſtyli qn (cui ſimiles, & æquales eſſe debent ſtyli inferius nominandi) Infra autem punctum M crena alia ſit (cooperta fingitur in Figura) per quam tranſeat ſtylus gK firmiter ſtatuendus in puncto K, ubi data ſit longitudo MK. His ita paratis, ſi ſtylus qn fixus ſit in puncto n; & ſtylus AM, premens filum ad Normæ latus, manu altera ducatur ea ratione (nunc nemini Geometrarum non nota) qua ſtylus in Parabolæ deſcriptione adhibetur; poterit eodem tempore, altera manu, ſtyloque (ſive, ut alii appellant, graphio) gK, Curva HXL ſignari.

5. Cui Curvæ aſymptoton eſſet curva Parabolica nNM, ſi Parabola vertice n, focoque F deſcriberetur. Ac, ſi Parabolæ axis abſciſſa nd diceretur x, & dZ applicata ad curvam HXL diceretur y; tam vero Parabolæ parameter, quam linea MK dicerentur a, haberetur AEquatio:

$$y^6 + xxy^4 - 2ax^3yy + aax^4 = 0$$
$$- 2axy^4 + aaxxyy$$
$$- aay^4$$

In qua (ut etiam ex conſtructione apparet) cum $x = 0$, eſſet $y = a$. At ſi applicata foret EZ ad axem

axem HR ipsius curvæ HXL, & pro abscissa HE poneretur itidem x; pro EZ, z; neque esset MK æqualis parametro a Parabolæ, sed alicui alteri lineæ b; tunc in superiore AEquatione, loco potestatum ipsius y, substituendæ essent potestates binomii $b+z$: & posset hæc eadem Curva Conchoides Parabolica nominari.

6. Quod si filo uteremur ad describendum circulum, motuque styli adhærentis ad extremitatem fili, simul duceretur regula aliqua, sive canon; qualis est SnIeT; datum esset facillima ratione describere Conchoidem illam Circularem, quam David Rivaltus in doctis Commentariis suis ad Archimedis Opera (pag. 93.) proponens in semicirculi limbo canaliculum excavari jubebat, ut citato in loco videre est. Parique ratione ad plures alias curvas, tamquam ad asymptotos, Conchoides aliæ duci possent. Possetque item variis in locis figi stylus immobilis, qualis in apposita Figura est qn.

7. Sed de re in exemplum adducta, jam vel satis, vel plus satis dictum est. Venio ad Transcendentium curvarum descriptiones, quæ Tractorio Motu tentatæ fuere. Cujus etiam motus hactenus propositi usus non ita a difficultatibus immunes reperti sunt, ut constet, eosdem in Geometriam esse recipiendos: cum tamen curvarum Transcendentium delineationes, quæ non per puncta, ut ajunt, verum facili ratione organica describi possent, haud levi hercle emolumento sublimiori essent Geometriæ. Porro facilitas descriptionis linearum cujuscumque generis, quanti facienda sit, non melius percipi poterit, quam si momentis suis perpendantur ea, quæ sanxit Vir Summus Isaacus Newtonus in „Arithmetica Vniversali „ (pag. 286.) de Algebraicarum

Linea-

Linearum comparatione; eademque ad descriptionis cujusvis lineæ utilitatem apta ratione transferantur. Newtoni autem verba sunt hæc: „ AEquationis simplicitas non est, sed descriptionis facilitas, quæ lineam ad constructiones Problematum prius admittendam esse indicat. Nam æquatio ad Parabolam simplicior est quam æquatio ad Circulum; & tamen Circulus ob simpliciorem descriptionem prius admittitur. „ Quod si, vel adversante AEquatione, quæ facilior descriptu est Curva, eadem reliquis est anteferenda; nonne præstabit Curvam, quæ unius organi operatione una perficiatur, anteferre iis, quarum nonnisi puncta aliqua, & hæc sæpe haud levi labore, possint inveniri? Neque tamen ideo dixerim, si Instrumentis linea duci non possit, usu descriptionis per puncta res peropportunas perque utiles non præstari: sed illud ajo; si utrumque fieri queat, sæpissime satius esse Instrumentis uti; dummodo Instrumenta apta sint: neque enim, quæ proponuntur omnia tanti sunt, ut transferri debeant ad usum. An vero illa, quæ exhibiturus sum, possint tuto adhiberi, tuum erit, Doctissime Vir, Tuique similium, ut principio exquisivi, judicium.

8. Pertinet autem illorum primum ad Curvam Tractoriam, cujus princeps & simplicissima proprietas hæc est: si Curva sit (*Fig.* 2.) AKO, hujus Asymptoton sit recta DN, quæcumque Tangens, puta KN, inter punctum contactus, & asymptoton DN intercepta, est æqualis constanti rectæ lineæ AD. Quæ proprietas cum ferme tam admirabilis tamque utilis esse videatur, quam est proprietas illa Logarithmicæ curvæ habentis Subtangentem constanti datæ jugiter æqualem; sane mirum vide-

videri potest, de hac Logarithmica curva adeo multa, adeo egregia, adeo geometricis usibus accommodata Viros Doctissimos invenisse, litterisque mandavisse; de illa vero Tractoria curva a paucis omnino pauca tradita reperiri. Quamobrem dabis hanc mihi veniam; ut antequam de hujus lineæ descriptione dico, nonnulla de ipsius inventione, nomine, atque præstantia in unum congeram.

9. Christianus Hugenius in „ Historia Operum „ Sapientum „ (quæ edebatur gallica lingua) Mense Februario anni 1693. lineæ Tractoriæ (cui tamen nondum hoc Tractoriæ nomen imposuerat) descriptionem, & de ea Theoremata nonnulla juris publici fecit: deque eadem acturus, „ ecce, „ ait, „ unam „ (lineam curvam) „ quam haud ita pridem inveni. „ At Goth. Gulielmus Leibnitzius in Actis Eruditorum, quæ Lipsiæ eduntur, Mense Septembri ejusdem anni 1693., narrat, Claudium Perraltum sibi olim degenti Lutetiæ proposuisse Problema, cujus tamen solutionem, Perraltus ipse fatebatur ingenue, nondum sibi occurrisse: fuisse autem Problema, Curvæ cujusdam (reapse Tractoriæ) naturam invenire: Atque Perraltum „ usum fuisse (intelligentiæ „ caussa) horologio portatili suæ thecæ argenteæ „ incluso (Fig. 3.) B, quod catenulæ AB ad the„ cam alligatæ principio A, secundum regulam „ AA, ducto per tabulam trahebat. Ita imum the„ cæ punctum (quod in fundi medio est) in ta„ bula describebat lineam BB: „ nimirum Tractoriam curvam. Hujus autem naturam Summus Geometra Leibnitzius, descriptione visa, statim est assecutus. Quæ cum ita sint, colligendum videtur, Perraltum primum invenisse lineam hanc, Leibnitzium inventæ lineæ principem proprietatem primum cogno-

cognovisse; Hugenium vero, posteriore tempore, marte tamen (ut ajunt) suo, utrumque præstitisse; primumque & curvæ hujus descriptionem, & naturam in vulgus edidisse. Quæ omnia Leibnitzius ipse in iisdem Eruditorum Actis anni ejusdem 1693. Mense Octobri satis perspicue indicavit. Ibi enim hæc legere est: Hugenius „ nunc tractorias „ constructiones protraxit in publicum primus. „ Nam etsi ego prior jam a multis annis idem ta- „ citus versaverim, & ut arbitror longius etiam „ provexerim, fateor tamen ideam primam hujus „ motus mihi a Perralto venisse, etsi a me profe- „ cta sit resolutio ejus, seu applicatio ad Geome- „ triam. „

10. Propositæ autem curvæ „ Hyperboles Quadra- „ trici „ nomen fuit in primo illo jam citato Hugenii Commentariolo, idque nomen a quadam ipsius curvæ proprietate est derivatum. At in ejusdem Hugenii Commentariolo altero, quod cum Leibnitzio communicaverat Auctor (insertumque fuit Eruditorum Actis anni 1693. Mense Octobri) Hugenius de curvis agens tractorio motu describendis, suam nominat „ Quadratricem Hyperboles; „ sed mox subdit, „ quæ inter Tractorias (ita enim vo- „ cari possunt) simplicissima censenda est. „ Tunc itaque huic nostræ Curvæ Tractoriæ nomen (a descriptionis forma) inditum: & quamvis Lineæ omnes tractione alicujus ponderis descriptæ (quales in Actis Eruditorum Iacobus Bernoullius anno 1693. Mense Iunio; & Leibnitzius, iisdem in Actis eodemque anno, Mense Septembri, alibique dedere) Tractoriæ appellentur; si tamen ponatur hoc Tractoriæ curvæ nomen, nec quidpiam adjiciatur, usu quodam factum est, ut curva illa, de qua

instituimus agere, hoc nomine designetur.

11. Hæcque eodem ab Hugenio in citato Commentariolo primo, propterea quia ipsius Curvæ longitudo per eandem ipsam Curvam „ mensurari „ queat, digna, „ dicitur, „ quæ & ob alia etiam „ notetur. „ Ibidem quoque, quod ope ipsius „ reducatur Hyperbola ad Quadratum, „ rem sibi visam esse Hugenius scribit, „ Geometrarum consideratione dignam. „ Neque tamen dissimulo, eundem Hugenium in alio Commentariolo scripsisse, plura se docere posse de Tractoriæ descriptione; „ sed his supersedendum arbitrari, donec insignis „ usus aliquis harum linearum in lucem proferatur. „ Quid ergo, fortasse inquies, in caussa esse poterit, ut Tractoriæ usus paullo ante indicati pluris fiant? si Hugenius ipse, insignes usus latere arbitrabatur; quandoquidem censebat, expectandum esse, ut proferrentur in lucem. At quod sentio respondebo: præterquam enim quod eo in loco verba faciebat Hugenius non de sua tantum, verum etiam de Tractoriis Bernoullianis; fatebor, a me neque profecto percipi rationem, cur proposita fuerit expectatio illa insignium usuum; neque percipi quomodo cohæreat locus ille cum reliquis scripti partibus: contra vero, a me plane intelligi & rationem eorum, quæ ante Hugenius ipse constituerat, & perspici modum, quo eadem illa cum reliquis scripti partibus cohærescant. Quamobrem in sententia plurimi faciendæ Tractoriæ curvæ haud ægre persto. Atque ea multa, quæ Leibnitzius in Eruditorum Actis anni 1693. Mense Septembri, fuse docteque protulit, ut curvas motu tractorio descriptas commendaret, mihi sane videntur in primis ad principem illam simplicissimamque Tractoriam jure meritoque

posse

posse referri. Et quidem naturæ Curvæ illius investigatio quid aliud est, nisi elegantissimum Problema pertinens ad Methodum (ut ajunt) Tangentium inversam? Est enim invenire lineam (*Fig.* 2.) AKO ejus naturæ; ut KN portio Tangentis, inter Lineam ipsam & axem (eundemque asymptoton) DN intercepta, sit datæ constanti æqualis.

12. Cujus Problematis enodationem Tractoriæ curvæ constructio ipsa suppeditat; de qua ut tandem aliquando agamus, Hugenii artificium ante omnia huc afferre præstabit. Itaque Hugenius, postquam eam Tangentis constantem æqualitatem (cujus paullo ante mentionem fecimus) inesse in curva illa necessario oportere constituit, gradum facit ad machinam indicandam, qua in ejusdem curvæ descriptione utebatur. Et quoniam Hugenii verba omnino clara sunt atque perspicua; iccirco, quemadmodum habentur in ipsius Commentariolo (de Gallico in latinum sermonem converso, insertoque nuperæ ejus Operum Editioni) ita ea subjeci: „ Constructio machinæ nititur in dicta Tangentis proprietate & principio vel lege motus; scilicet, si „ in plano horizontali detur punctum, quod suo „ pondere vel alio modo aliquantulum resistit, junctum extremitati fili, vel vectis inflexilis, cujus „ altera extremitas movetur, punctum illud describet curvam, cujus Tangens semper erit filum vel „ vectis. In instrumento vel machina, de qua dixi, movenda est (*Fig.* 2.) extremitas D fili, vel „ vectis DA juxta lineam rectam DN, & cavendum ut cuspis in extremitate altera A hærens erecta maneat dum interim premetur in planum horizontale, potius elaterio quam pondere, quoniam sic curva AK describitur sine errore sensibili,

„ licet planum non ſit exacte horizontale; & de-
„ tegitur, an habeat veram figuram reducendo ex-
„ tremitatem vectis N per eandem rectam N D;
„ quoniam requiritur, ut cuſpis regrediatur ex K
„ in A per eandem viam. „ Atque in Commen-
tariolo altero, etſi „ alios modos, ac fortaſſe com-
„ modiores, ſe indicare poſſe „ ſcribat; nihil ta-
men ſubdit, niſi id: „ ad eam „ (Tractoriæ de-
ſcriptionem) „ filis nihil opus eſſe, ſed bacillo tan-
„ tum utrinque cuſpidem lateri infixam habente,
„ quo fit ut & regreſſu explorari poſſit quam re-
„ cte exarata ſit.

13. Leibnitzius autem curvæ deſcribendæ ratio-
nem ipſa problematis enunciatione concludit. In
citato enim „ Eruditorum Actorum „ loco „ Clau-
„ dius, „ ſcribit, „ Perraltus — — mihi & aliis
„ ante me multis propoſuit hoc Problema — — :
„ invenire lineam (*Fig.* 3.) B B, quam pondus,
„ fili vel catenulæ A B extremitati B annexum,
„ puncto B, vel æquivalente deſcribat in plano ho-
„ rizontali; dum alteram fili A B extremitatem A,
„ ducendo per rectam immotam A A, eo ipſo pon-
„ dus B trahimus per dictum planum horizonta-
„ le; in quod, vel æquivalens, etiam recta A A,
„ & durante motu, filum A B, „ cadunt. Addit-
que, ſe ſtatim percepiſſe, „ filum illud perpe-
„ tuo lineam tangere: „ quod filum cum ſibi ipſi
ſemper ſit æquale; ſatis apparet, tum curvam, ea
ratione deſcriptam, Tractoriam eſſe; tum eandem
illam propoſitæ curvæ deſcriptionem a Leibnitzio
fuiſſe receptam; idque etiam ex pluribus aliis ſcri-
pti ejuſdem locis liquido conſtat.

14. Hugenius ſuæ conſtructionis demonſtrationem
non protulit; ſed, eam inniti „ dicta Tangentis

„ pro-

„ proprietate, & principio vel lege motus, „ aperte indicavit. De quo ſane „ principio vel motus le„ ge „ cum mentionem fecit, profecto illud ſignificavit, in ſua conſtruendi ratione aliquid phyſici admixti contineri. Leibnitzius demonſtrationis ſuæ prima dedit lineamenta potius, quam omnibus neceſſariis partibus concinnatam demonſtrationem ſubjecerit: neque eidem (neſcio quo fato) apte reſpondet Figura, ad quam eadem illa refertur demonſtratio. Sufficiunt nihilominus illa lineamenta, illaque Figura, ut ipſius ratiocinium percipere mente poſſimus. Non tamen ullam ego afferam hoc loco demonſtrationem; tum quia materia nimis jam creſcit; tum quia demonſtrationem aliam conſtructioni meæ accommodatam daturus ſum infra, talem hercle, ut videbis, re mea exigente.

15. At dabis hanc mihi veniam, ut quando occaſio ita fert, animadvertam; Leibnitzium in eodem illo citato Commentariolo, antequam Tractoriam proponeret, faſſum fuiſſe atque etiam profeſſum, eſſe „ quaſdam conſtruendi rationes, quæ aliquid phyſi„ ci videantur habere admixtum: „ & inter exempla allata ad id illuſtrandum poſuiſſe hæc: „ quem„ admodum nos aream Hyperbolæ quadravimus, „ vel Logarithmos conſtruximus motu compoſito „ ex æquabili & per frictionem uniformem retarda„ to, vel ope chordæ ſive catenæ pondere præditæ. „ At poſt hæc verba præſtat obſervare, a Leibnitzio nominatam modo veterem (ut ita dicam) quadraturam „ per frictionem „ ad genus illud deſcriptionis noſtræ Tractoriæ haud referri: quandoquidem paullo infra noſtræ Tractoriæ deſcriptionem ad „ novum quoddam motus genus „ non obſcure adducit.

16. Quin

16. Quin etiam ita rem persequitur Leibnitzius, ut evincere nitatur, motum illum, quo describitur curva nostra, ejus indolis esse; ut „ præ ceteris vi„ deatur posse referri ad puram Geometriam, affi„ nisque sit descriptioni linearum per fila ex umbi„ licis, sive focis, „ nimirum Conicarum Sectionum. Quo in Leibnitzii loco illud in primis notatu quidem dignum est, propositam constructionem „ af„ finem „ dici descriptioni Sectionum Conicarum, non tamen aut pariter certam, aut organicam appellari. Et quamvis descriptionem illam pluribus commendet; nihilo tamen minus dum id facit, ponit etiam stylo utendum esse, tractionem filo peragendam, atque pondere opus haberi puncto describenti incumbente: quæ sane omnia haudquaquam efformare videntur organum germanum, organisque illis, quibus Conicæ delineantur Sectiones, æquandum.

17. Et sane æquandum non esse, Hugenii verba perspicua, atque iterata commonstrant. Namque Tractoriæ constructionem suam constructioni Leibnitzianæ prætulit satis clare, propterea quod ad suam „ filis nihil opus esset, sed bacillo tantum „ utrinque cuspidem lateri infixam habente, quo „ fieret ut & regressu explorari posset quam recte es„ set exarata: „ & nihilo tamen minus hac ipsa descriptionis suæ forma haudquaquam Hugenium fuisse contentum liquet vel ex eo, quod paullo supra affirmaverat, „ se posse docere qua ratione optime „ perageretur descriptio suæ Quadratricis Hyperbo„ læ „ hoc est „ Tractoriæ, sed supersedendum ar„ bitrari. „ Quis enim non videat, futurum nullo modo fuisse, ut optimam constructionem doceri a se posse scriberet, si datam illam, quam semel ite-

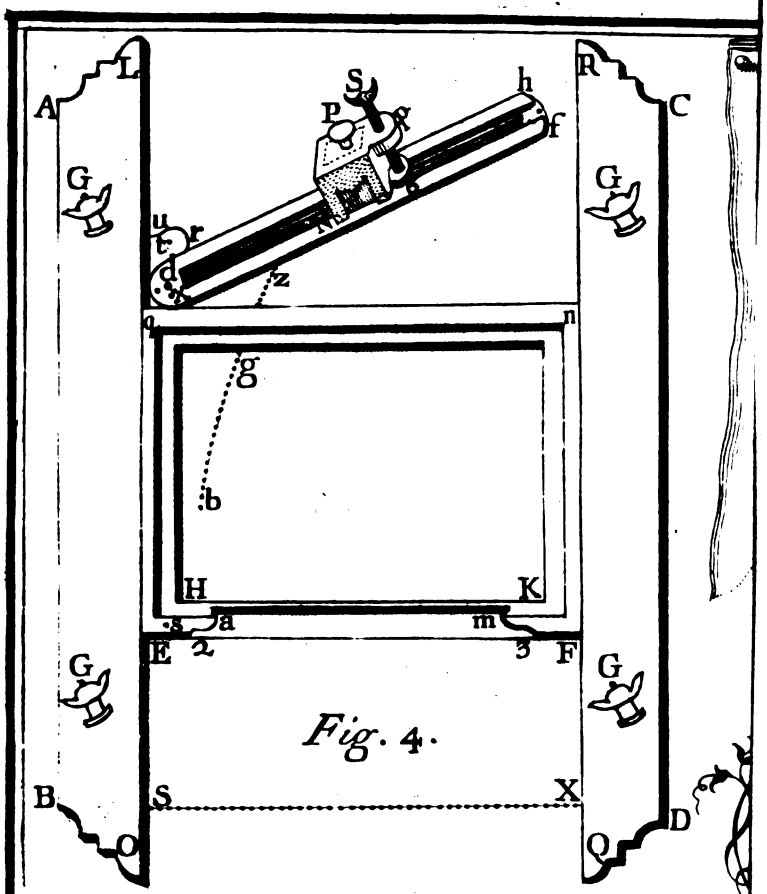


Fig. 4.

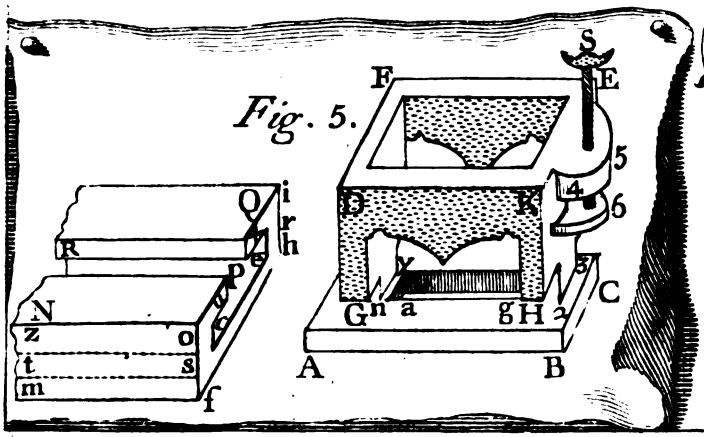


Fig. 5.

iterumque propofuerat, optimam reputaffet?

18. At fi quærat aliquis, utra ex conftructionibus præftet, num ea Hugenii, an vero ea Leibnitzii, dicam; ipfi Leibnitzio modo aliquo fuiffe fufpectam fuam illam tractionem filorum ope adminiftratam; ipfius enim in fcriptis hæc legere eft: „ filum ma„ teriale cum numquam habeat fummam flexibi„ litatem facile ftylum feu punctum defcribens, „ nonnihil in tranfverfum agere poffet — — „ ideo opus eft ut aliqua „ caufſa fit, quæ punctum de„ fcribens nonnihil faciat vel apprimi vel adhære„ re loco plani, cui ineft: „ qua fane ex caufſa enafci facile poteft inæqualis extenfio fili extremitate altera tracti: quamobrem Hugenius conftructionem fuam (ut jam innuimus) Leibnitzianæ prætulerat; nimirum quod in fua „ filis nihil opus effet. „ At vel in hac Hugenii, quamlibet perturbationem ortam in tractione unius extremitatis bacilli, ob materiæ duritiem, neceffe haud dubie eft communicari extremitati alteri Curvam defcribenti; inde autem errorem progigni. Hæc omnia tamen ubi dixero, litem hanc meam non faciam: illud unum animadvertam (quod etiam paullo ante indicaveram) Hugenium fua contentum non fuiffe, quamvis fuam Leibnitzianæ præferret.

19. Quæ Hugenii fententia luculentius etiam perfpicitur eo in loco; ubi eximius ille Geometra, poftquam de fua Tractoriæ defcriptione verba fecerat, fubdit: „ fi hæc defcriptio, quæ per leges Mechani„ cæ eft accurata, poffet haberi pro Geometrica, eo„ dem modo ut defcriptiones Sectionum Conica„ rum, quæ fiunt per Inftrumenta, haberemus in„ de & quadraturam Hyperboles & perfectam con„ ftructionem omnium Problematum, quæ ad hanc

„ qua-

„ quadraturam reducuntur. „ Quid autem clarius dici poterat, ut perſpicue appareret, aliquid ab eo deſiderari in deſcriptione ſua, eoque magis in Leibnitzii deſcriptione? Cur vero deinde modum „ opti- „ me peragendæ deſcriptionis ſuæ Quadratricis Hy- „ perbolæ, „ (hoc eſt Tractoriæ) quem ſe habere ſcripſerat, numquam protulerit, neque video, neque lubet ducere conjecturas.

20. Satius profecto erit, ex hiſce colligere; ſuperiorum earum deſcriptionum modos eſſe infra modum illum, quo Conicæ Sectiones organico artificio delineantur. Nitendum igitur, ut ad hujuſce artificii organici perfectionem (quantum patitur rei natura, noſtræque vires ferre queunt) propius, quam hactenus factum, aut ſaltem notum fuerit, accedatur. Quod ergo Inſtrumentum ad id conducere poſſe exiſtimo, nunc deſcribam.

21. Primumque ejus partes exhibebo ſingillatim, deinde vero integri uſum ſubjiciam. Cum autem id ſit, cujus præſertim cauſſa epiſtolam hanc me ſcripſiſſe, principio jam noſti; ſi eorum plurium, quæ uſque ad hunc locum præmiſi, tædio aliquo affectus non es, nec umquam immurmuraſti illud Poetæ:

„ Iam dic Poſthume de tribus capellis: „

tuæ, benevole Amice, eximiæ tribuam humanitati. En Inſtrumenti partes.

22. d h f (*Fig.* 4.) eſt regula quinque ex lamellis compoſita; quam dicam Radium. Sunt autem lamellæ ex aurichalco formatæ; quo ex metallo pariter conſtant Inſtrumentorum reliquæ partes. Totius Radii longitudo eſt pollicum ſex, linearumque circiter novem; latitudo linearum ſeptem cum dimidia; craſſities lineis duabus paullo minor. Ad Figuras autem quintam & ſextam, dicatas ejuſdem Radii

deſcri-

descriptioni, antequam accedo, animadvertam; Figuras illas magnitudine me aliquanto majore delineavisse, ut structuræ partium clarior esset repræsentatio. Itaque extremæ partis Radii lamella inferior (*Fig.* 5.) est m f h; hæcque obtinet jam indicatam latitudinem linearum septem cum dimidia: t s c, e r sunt lamellæ binæ, latæ lineas duas: demum z o u, x i sunt binæ aliæ lamellæ, latæ duas cum dimidia linea. Quæ omnes lamellæ, claviculis arcte inter se connexæ, constituunt crenam p c e; in inferiore parte c e latiorem, arctiorem vero in parte p superiore.

23. A B C est lamella longa lineas decem, latitudine & crassitie tantum non æqualis parti c e crenæ, quam percurrere debet: lamella hæc perforatur oblonga fissura a g. Super eadem lamella est capsula G H K E F D, cujus opposita duo latera G F, H E desinunt in duos pediculos n y, 2. 3, quorum partes inferiores sunt insertæ in lamellam A B C, atque adferruminatæ. Eorundem vero superiores partes, quæ exstant supra lamellam, tantam habent latitudinem, quanta ipsorum motum per arctiorem crenæ partem p minime impediat. Ita fit, ut lamella A B C partem crenæ c e, pediculis n y, 2. 3 partem crenæ p percurrentibus, capsula G H K E F D supra Radii superficiem N Q supremam feratur, quam inferioribus partibus laterum G F, H E tantum non attingit.

24. Ad latus H E exstat crassa lamina 4. 5 eidem adferruminata. In hac est ad perpendiculum foramen concavis instructum spiris, quæ congruunt spiris cochleolæ S, per idem foramen transeuntis, atque prementis, ubi opus est, subjectam inferiorem lamellam 6. Quamobrem, cum Capsula inserta

eſt in Radium (ut videri poteſt in Figura 4.) atque a cochleola S premitur ſubjecta lamella 6 contra Radium; tunc ita ſtabiliter in Radio capſula tota firmatur, ut e loco ſuo dimoveri minime queat.

25. ATBD (*Fig.* 6.) rotula eſt, cujus diameter linearum circiter ſex (hæc dicetur Rotula Signatoria) ZNOLVRK eſt capſula ex tribus lamellis RKNZ, RZLV, OLV inter ſe ad angulos rectos adferruminatis in partibus RZ, VL. Inter lamellas RN, VO ea intercedit diſtantia, ut inter eaſdem rotula ATBD locari queat: itemque in eaſdem axis c, circum quem volvitur ipſa Rotula, infigitur. Et earundem lamellarum altitudo KR, OL ea eſt, ut rotulæ ſuprema parte D ferme attingente intimam ſuperficiem lamellæ ſuperioris RL, pars inferior ATB, duabus ſuæ diametri lineis extra lamellas ipſas RN, VO remaneat. Lamella ſuperior RL circa medium ſuum perforata eſt; atque per id foramen tranſit cylindrulus deſinens in capulum P, intra illud idem foramen volubilis.

26. Nunc ponamus, plano tranſverſo ducto per lineam mM, rectoque ad planas ſuperficies Rotulæ Signatoriæ, & tranſeunte per axem, circum quem gyros ſuos Rotula perficit; ponamus, inquam, tali plano fieri Capſulæ ſectionem EGHF; rotulæ ſectionem ei; cylindri, & capuli ſectionem P: atque cn repræſentare axem, quem circum ipſa rotula volvitur. Quæ rotula cum referat figura ſua recti coni fruſtum, ejus ſectio talis evadit, qualem in appoſita citata Figura videre eſt. Rotula autem craſſitie ſua lineam æquat dimidiam; at prope foramen, per quod traicitur axis cn, modiolo veluti

quo-

quodam inſtruitur, lineam unam paullo excedente; nempe ut axis vis firmior inde eſſe queat ad Rotulam ipſam dirigendam. Rotulæ ambitus extremus, qualis in e & i, (hoc eſt majoris baſis ipſius Rotulæ ambitus, cujus rotatione Curva ſignatur) levigatus non eſt, ſed quaſi minutiſſimis denticulis exaſperatus, ut ad ſubjectum planum rotula leviter preſſa facilius adhæreat.

27. Quod Planum majoris baſis, tranſiens per ambitum, quo ſignatur curva, dicetur Planum aciei Rotulæ; ſive ſimpliciter Rotulæ Planum.

28. Linea recta eP ducta per centrum majoris baſis, & per punctum e, in quo Rotulæ ambitus ſubjectam chartam continget (quæ recta eP ſemper perpendicularis erit ad eandem illam ſubjectam chartam) appelletur Axis Contactus Rotulæ Signatoriæ.

29. Huic Axi eP congruere etiam debet Axis cylindruli, & capuli P.

30. Redeo ad Capſulam ZNOLVRK. Atque ajo, ipſius magnitudinem eam eſſe, quæ internæ cavitati prioris (*Fig.* 5.) capſulæ GHKEFD ita quadret, ut illa intra hanc nullo labore immitti queat. Illa autem in hanc immiſſa, Rotulæ (*Fig.* 6.) portio ATB per fiſſuram (*Fig.* 5.) ag libere pertranſit: eſt enim eo in loco lamella ABC perforata, ut pertranſiens Rotula nuſpiam lamellam contingat. Machinulam, hac ratione compoſitam ex duabus capſulis & rotula, nomine Curſoriæ Capſulæ nuncupabo.

31. Hiſce autem ex poſitionibus curſoriæ capſulæ & rotulæ, tum vero ex inſertione ipſius capſulæ in Radium, neceſſario fiet; ut Planum Aciei Rotulæ perpendiculare ſemper ſit ſubjectæ chartæ.

32. Radii (*Fig.* 4.) dfh lamella infima, quæ ponatur esse (*Fig.* 7.) dmfh, pertusa est oblonga fissura ae; infra quam transit Rotulæ Signatoriæ pars cn: nimirum pars illius portionis (*Fig.* 6.) ATB, quam etiam per fissuram (*Fig.* 5.) ag lamellæ ABC transmitti, in Articulo 30. demonstravi.

33. ABOL, CDQR (*Fig.* 4.) sunt duæ laminæ parallelepipedæ figuræ, quæ cum Tabella (super hanc charta est, in qua delineatur curva) subjecta adnectuntur ope cochlearum GGGG, intrantium transversas cum Tabella commissas laminas: in Figura tamen, neque hæ transversæ laminæ, neque Tabella ipsa, repræsentantur. Priorum illarum Laminarum interni margines se se respicientes OL, QR paralleli existunt: distantiaque SX inter eos, ad perpendiculum excepta, sex pollices & decem lineas æquat. Internorum marginum Lineæ extremæ OL, QR appellentur Lineæ Directrices.

34. EFnq est Parallelogrammum (ut nonnulli Mechanici appellant) ex quattuor lamellis, seu regulis (rectos angulos comprehendentibus) efformatum, cui quattuor aliæ arctiores superpositæ sunt affixæque (quemadmodum in Figura videre est) ad augendam Instrumenti soliditatem. Animadvertere tamen præstat, lamellas lateris EK in Figura non æque videri posse, ac laterum ceterorum lamellæ cernuntur. Caussa autem est hæc. Ad ejusdem lateris EK posteriorem partem EF alia lamella 2am3 ad angulos rectos est adferruminata; hujusque delineatio impedit, ne ipsius lateris EK delineatio integra videri queat. Duo autem Parallelogrammi latera EF, qn, ab longitudine pollicum sex & linearum decem vix lato capillo deficiunt. Latera duo reliqua

Eq,

Eq, Fn longitudinem habent trium pollicum, linearumque novem.

35. At lamella lateris Eq producitur longitudine novem linearum usque in ur: & in hac parte qur est foramen, in quod infigitur Axis d (appellaburque Foramen Axis d) circum quem Axem in gyrum ducitur Radius dhf. In posterum littera d tam hunc Axem significabimus, quam punctum medium Axis ipsius sumtum in superficie summa Radii sive centrum Foraminis Axis d.

36. Punctum e, signatum in Cursoria Capsula (quod notavimus etiam in Figura 6, in qua tamen adpositam habet litteram s) ita respondet alteri puncto x notato prope Axem d, ut distantia inter hæc duo puncta semper sit æqualis distantiæ intercedenti inter illud punctum, quo subjecta charta contingitur a centro Foraminis Axis d, atque illud alterum punctum, quo extremitas Axis contactus rotulæ chartam eandem contingit. Duo hæc puncta dicentur puncta Lineæ Radii: quia distantia inter duo hæc puncta, nimirum linea recta conjungens puncta hæc, appellabitur Linea Radii. Aliquando etiam Tangens describendæ Curvæ dicetur. Porro ex paullo ante dictis dilucide apparet, eidem lineæ radii semper æqualem esse rectam lineam conjungentem duo illa altera puncta e x. Prætereaque animadvertere juvat, puncta lineæ radii ab utroque radii latere æquidistare. Quod si in radio cursoria capsula, ope cochleolæ S (quemadmodum in Art. 24. dictum est) firmata sit; evidens profecto est, Radii Lineam constantis jugiter magnitudinis esse oportere.

37. Sunt præterea in Radio duo foraminula (in Figura ad extremitates Radii hæc puncta notata sunt,

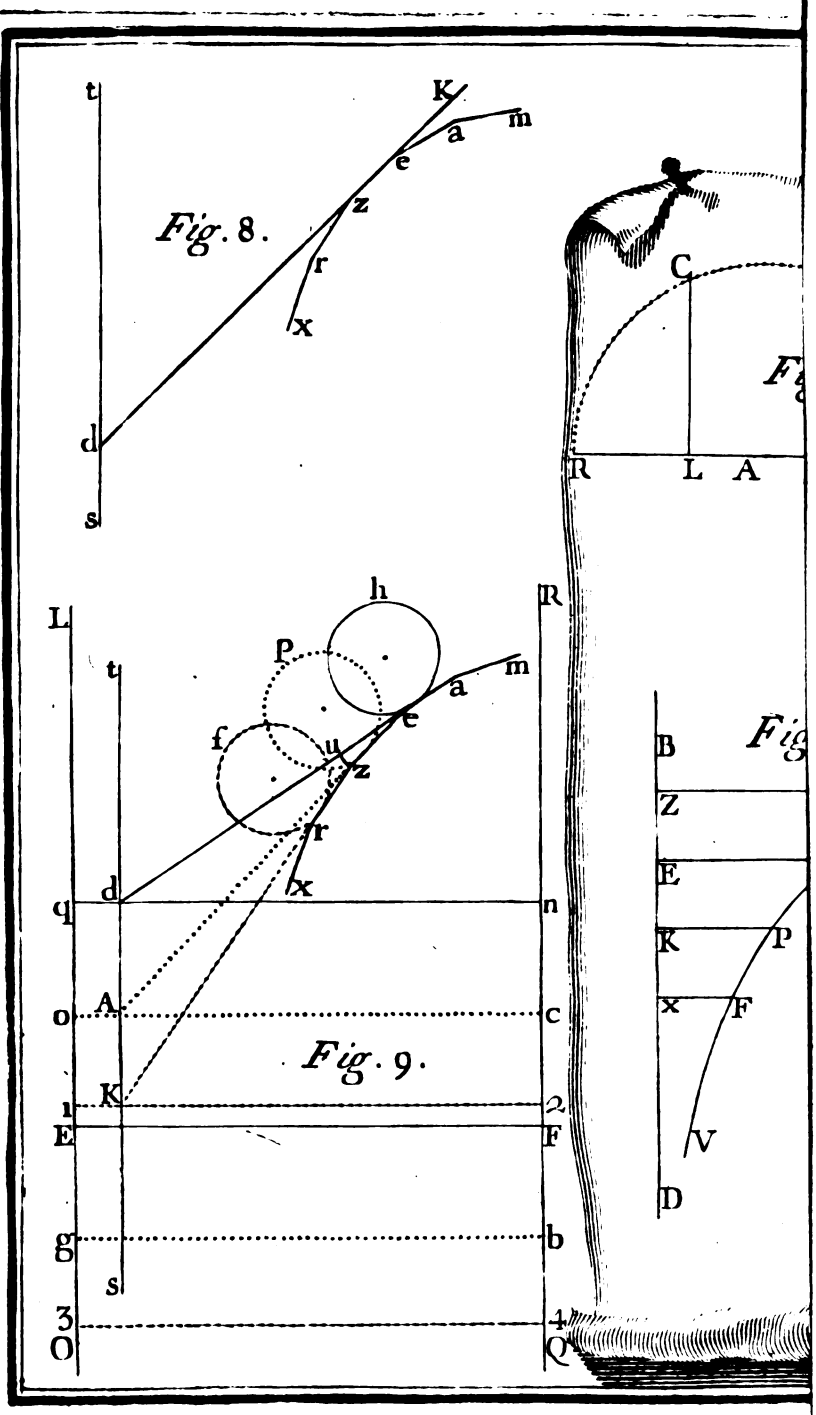
ſunt, nullis tamen ſignata litteris) iis in locis inſculpta, ut recta linea, ducta per eorundem foraminulorum centra, tranſeat per puncta Lineæ Radii: atque ideo ex Linea illa abſcindi poteſt Linea Radii.

38. st ſunt duo foraminula, quorum centra cadunt in rectam lineam tranſeuntem per punctum d, & parallelam ad marginem LO. Linea, quæ intelligetur ducta per hæc puncta, nuncupabitur Linea Aſymptoton; ſive ſimpliciter, Linea st. Et foraminula illa dicentur foraminula Lineæ Aſymptotōn.

39. Porro quoniam Parallelogrammum EFnq poſitum inter Laminas ABOL, CDQR, ſecundum has moveri antrorſum retrorſumque poteſt liberrime (non tamen laxe) iccirco, ſi concipiatur, id Parallelogrammum tali motu cieri, perſpicuum fiet; a centro Foraminis Axis d, ſubjectam chartam contingente, fluxu ſuo deſcribi ſive percurri lineam aſymptoton, hoc eſt lineam st. Quod punctum cum etiam extremum ſit lineæ radii (ut conſtat ex Art. 36.) evidens pariter eſt, lineæ radii extremum unum ſemper eſſe in linea aſymptoto: ut in rotulæ contactu ſignante curvam extremum alterum ſemper eſt.

40. Demum, cum in radio curſoria capſula ope cochleolæ S firmata eſt; conſtanter Planum aciei rotulæ, ſi produceretur, tranſiret per lineam radii: ut quidem ex conſideratione conſtructionis capſulæ ejuſdem, id verum ſemper eſſe, poteſt dilucide apparere. Quamobrem, ubi cochleola firmata ſit, dicemus; Planum aciei rotulæ conſtanter accommodatum permanere ad lineam radii.

41. Partium hactenus deſcriptarum ad uſum quod ſpe-



ſpectat, id perfacile eſt. Parallelogrammum EFnq ponatur inter laminas ABOL, CDQR; ſecundum quas moveri poteſt (ut in Art. 39.) dictum eſt. Tum curſoria capſula (*Fig.* 5. & 6.) inferiore ſui parte ABC, ny, 2. 3. inſeratur in radii crenam cep (quemadmodum in Art. 23. expoſuimus) Tum (*Fig.* 4.) eadem capſula in hac quarta Figura litteris Np notata, ita promoveatur, ut diſtantia inter puncta ex, nimirum linea radii (de qua diximus in Art. 36.) ſit æqualis datæ Tangenti curvæ Tractoriæ deſcribendæ: tuncque circumvoluta cochleola S, capſula in ea radii parte firmetur. Deinde admoveatur radius ad lamellam qn: atque acu, ſeu ſtylo, per duo foraminula deſcripta in Art. 37. duo notentur puncta; per quæ, ſi ducatur linea recta, poterit ex hac abſcindi linea radii; quæ in modo propoſita radii poſitione erit etiam maxima Applicata. Pariterque per duo foraminula st (de quibus in Art. 38. verba fecimus) ſignentur duo alia puncta; & recta linea, ducta per hæc, erit deſcribendæ Curvæ aſymptoton.

42. Quibus ita comparatis; extremis digitis lævæ manus trahatur retrorſum lamella 2am3 ita, ut a digitorum apicibus lamella EHKF leviter prematur; prematurque eodem tempore, itidemque leviter, digito indice dextero capulum P. Hoc autem modo, dum Parallelogrammum retrahetur, ſignabitur a rotula in ſubjecta charta Tractoria curva zgb, cui Tangens illa data conveniet.

43. Quod ut demonſtrari facilius queat (quando jam, ut vides, Ornatiſſime Vir, brevitatis laudem conſequi minime poſſum) Sumptiones, ſeu Lemmata nonnulla præmittam.

44. Principio itaque, cum Marchione Hoſpitalii, aliiſ-

aliisque Geometris, id ponam, quod a Geometrarum nemine hodie non conceditur: lineam curvam (*Fig.* 8.) m e x considerari posse ceu compositam ex infinitis lineolis (sive elementis) rectis, infinite parvis, m a, a e, e z, z r, r x, comprehendentibus inter se angulos, ex quibus lineæ curvatura progignitur.

45. Quodlibet autem ex iisdem elementis, puta e z, utrinque productum in K & d, esse ejusdem curvæ tangentem in puncto e; aut (quod perinde est) in puncto z. Et id, licet in curvis quibuscumque lineis verum sit, a me tamen applicabitur dumtaxat iis, quarum elementa formant inter se omnes angulos ad easdem partes; atque ita statuam: Si alicujus Curvæ elementa forment inter se omnes angulos ad easdem partes, quodlibet ex iisdem elementis si producatur, fiatque magnitudinis finitæ linea, Tangens erit ejusdem Curvæ.

46. Deinde vero ponam, Curvam illam m e x Tractoriam esse, cujus asymptoton (sive Axis) s t: duasque in ea proprietates considerabo. Quarum altera erit; ab ipsius elementis angulos, m a e, a e z, e z r, reliquosque formari (si Tractoriæ initium ab ipsius vertice sumatur) omnes ad easdem partes; Tractoria enim jugiter convexa est versus asymptoton s t. Altera autem erit hæc; quodlibet ex ejusdem curvæ elementis, caussa exempli e z, productum in d usque ad asymptoton s t, nimirum lineam e d (seu, quod idem est, z d) esse tangentem, ut in Articulo superiore exposuimus; & quamlibet hujuscemodi tangentem interceptam inter curvam, & asymptoton constanti datæ esse æqualem (quæ æqualitas princeps profecto est & simplicissima Tractoriæ proprietas, ut in Art. 8. jam ostendimus)

Porro

Porro proprietatum expoſitarum prima id efficit, ut & linea curva ſit, & curva ſemper ad eaſdem partes: ſecunda, ut linea ea ſit, quæ Tractoria appellatur. Igitur, quando demonſtrari poſſit, in data aliqua linea duas modo expoſitas proprietates ineſſe; tunc etiam concludi poterit, datam illam lineam eſſe Tractoriam.

47. Nunc autem tranſeuntes ad noſtram curvam, atque animum ad partes Inſtrumenti noſtri, illiuſque deſcriptionem advertentes; ponamus (*Fig.* 9.) s t eſſe futuræ curvæ lineam aſymptoton (quæ ut duci debeat, jam liquet ex Art. 38.) O L, Q R eſſe Lineas Directrices (in Art. 33. deſcriptas) tum vero e h eſſe Rotulam Signatoriam (de qua in Art. 25. & 26.) atque Parallelogrammum (de quo in Art. 34. verba fecimus) eſſe E F n q; ac Lineam Radii, ſeu Tangentem deſcribendæ Curvæ (de qua in Art. 36. dictum eſt) eſſe a d, ſive e d. Tranſeatque planum aciei rotulæ e h (quod perpendiculare eſt ſubjectæ chartæ; ut ſuperius in Art. 31. oſtendimus) per lineolam a e infinite parvam (hoc eſt extremam lineæ radii partem) quam fingemus ex duobus conſtare punctis, quorum poſterius e ab ipſa rotula e h contingatur.

48. Quibus poſitis; intelligamus, motu Parallelogrammi a ſitu E F n q in ſitum g b c o, rotulam e h uno puncto fuiſſe promotam, atque tranſiviſſe in z p, formatamque fuiſſe lineolam infinite parvam e z, quam itidem fingemus conſtare duobus ex punctis. Hæc vero ubi conſideremus, haudquaquam concipere poterimus tranſitum rotulæ ex puncto e in z, quin concipiamus, lineam radii ita moveri, ut ejuſdem extremum punctum d feratur, per aſymptoton s t, ex d verſus s, ut in A (quandoquidem in tali motu ab eo puncto d percurri neceſſario debet linea aſymptoton, ut dictum eſt in Art. 39.) & quin

etiam concipiamus, hoc eodem Radii motu, Planum aciei ipsius rotulæ converti circum suum contactus Axem (definitum in Art. 28.) idemque Planum constanter accommodatum permanere ad lineam radii (vide Art. 40.) prætereaque conversione illa fieri, ut inde punctum z cadat citra punctum u illi respondens in linea e d, hoc est citra ipsam lineam e d; atque ita duæ lineolæ a e, e z angulum a e z comprehendant. Quin etiam ex constanti positione rotulæ perspicuum fiet; lineolam e z productam usque in A, sive (ut liquet ex Art. 45.) tangentem e A interceptam inter punctum e & asymptoton, esse (vide postremam partem Art. 36.) esse, inquam, constanti lineæ radii æqualem. Quod si Parallelogrammum intelligatur translatum a situ g b c o in situm 3. 4. 2. 1, atque ita etiam descripta nova lineola z r prioribus illis æqualis, poterit eodem prorsus modo demonstrari, lineolæ z r punctum r cadere citra lineam z A; &, quod consequetur, duas lineolas e z, z r angulum e z r comprehendere, & comprehendere ad easdem partes, ad quas est angulus a e z. Lineolam vero z r productam usque in K, sive tangentem z K, interceptam inter punctum z & asymptoton, esse itidem constanti lineæ radii æqualem. Idemque de quibuscumque lineolis, sive elementis, Instrumenti nostri motu descriptis, poterit perspicue eadem ratione demonstrari.

49. Motu igitur Instrumenti nostri describentur Lineolæ infinite parvæ, seu elementa Curvæ delineandæ, quorum hæ duæ erant proprietates. Prima scilicet; ab elementis illis inter se angulos formari omnes ad easdem partes, unde Curva Linea exorietur. Altera; quodlibet ex iisdem Curvæ elementis, productum usque ad asymptoton, esse

Tan-

Tangentem Curvæ; & quamlibet hujuſcemodi Tangentem, interceptam inter Curvam, & aſymptoton, jugiter eſſe conſtanti datæ æqualem. At, quoties in aliqua Linea hæ duæ modo expoſitæ proprietates inſunt, Linea illa (per Art. 46.) eſt Tractoria. Ergo Linea, noſtro Inſtrumento deſcripta, eſt Tractoria: quod erat demonſtrandum.

50. Habes nunc, Doctiſſime Vir, explicatam rationem totam deſcriptionis meæ: facileque potes conſtructiones aliorum ſupra jam traditas cum mea conferre, atque expendere num ad organicum illud artificium, quo Conicæ Sectiones delineantur, propius acceſſerim; eumque finem ſim conſecutus, quem (ut ſcripſi in Art. 20.) mihi propoſueram. Quod enim ad me attinet; prorſus organicam eſſe arbitror Curvæ meam hanc deſcriptionem; quippe quæ tota, quanta eſt (ni peſſime fallor) ab ipſa Inſtrumenti ſtructura motuque proficiſcatur. Nonne enim poſitio illa, quam obtinet axis contactus rotulæ ſignatoriæ, ita determinat rotulam ipſam; ut, dum radius movetur, circa axem eundem Planum rotulæ certa lege vertatur? non proximum rotulæ punctum ſignaturum Curvæ punctum novum ab ea poſitione rotulæ ita neceſſario determinatur (quod diligentius animadverti velim) ut ex tali poſitione axis, hoc eſt prioris puncti, tracto Parallelogrammo, certum propriumque Curvæ novum punctum ſignari debeat? Quod ſi levi aliqua preſſione (ut in Art. 42. diximus) opus eſt: nonne etiam in organica Conicarum Sectionum deſcriptione neceſſarium plane fit, ſtylo filum ad rigidas regulas adprimere? Quæſo igitur a Te, ne graveris diligenter perpendere quæ organicarum deſcriptionum natura eſſe debeat, quæque earundem

partes; tum vero examinare uti partes hæ reperiantur in Sectionum Conicarum descriptione; uti in descriptione Curvæ nostræ. Hisce comparationibus (jam non fateri non possum) spero fore, ut judicio quoque tuo opinio mea comprobetur.

51. Si vacaret, pluribus ostenderem, facili pariter ratione eodemque Instrumento, Curvam aliam posse describi, modo hoc: nimirum si, dempta (*Fig.* 4.) cochleola S, cursoriæ capsulæ basis per crenam, cui immissa est, liberrime moveri posset; filum autem altera extremitate alligatum esset eidem capsulæ, & circum radii axem d (qui ad hunc usum productus eminere supra radium intelligatur) tamquam circum trochleam conversum, altera vero extremitate fixum ad tabellam detineretur ad partes superiores versus L in quodam puncto lineæ s t (alibi autem firmata fili extremitate, prodirent curvæ differentes a mox exponenda) tractione parallelogrammi describeretur Curva, cujus AEquatio differentialis: $2aydx - 2yxdx + aady + xxdy - 2axdy - yydy = 0$

52. Consideratio vel levis circumstantiarum superioris descriptionis Curvæ satis indicat; Curvæ hujusce constructionem requirere perinde esse, atque proponere Problema hoc; nimirum invenire Curvam, cujus Abscissa, Subtangens (jacens a parte opposita ei, a qua Abscissa proficiscitur, & extra hanc, atque etiam in directum cum hac producta) & Tangens æquales sint ubique rectæ datæ lineæ constanti. Et quidem AEquatio differentialis, quæ hujusce Problematis solutione reperitur, eadem illa est, quam dedimus paullo supra. Qua sane AEquatione (fateor) principio suspicatus sum, fortasse determinari Curvam ad Transcendentium genus referendam: at deinde animadverti, artificio

haud

haud difficili Integralia terminorum ejusdem AEquationis inveniri, curvamque algebraicarum genere contineri; immo esse ambitus circuli arcum: quod etiam ex consideratione naturæ Tangentium circuli mihi plane innotescebat:

53. Idque ut appareat; ponamus, quæso, dari (*Fig.* Φ) quadratum SNCA; & centro C, intervallo lateris CA, circuli quadrantem AIBN esse descriptum. Deinde sumto pro axe latere SN, a quolibet hujus puncto R ducatur Applicata RI, ex puncto autem I tangens IP.

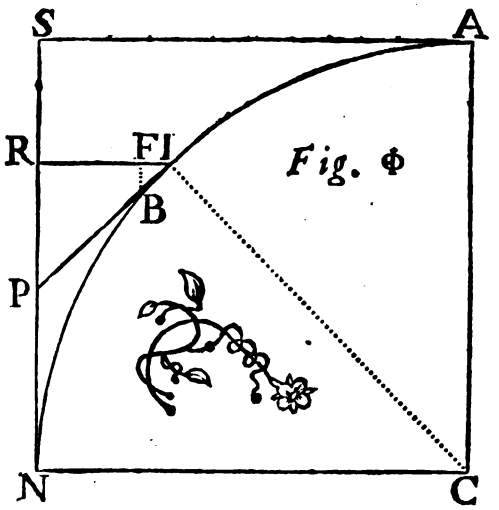


Fig. Φ

Et quia IP, & NP sunt duæ tangentes coeuntes in punctum P, erit IP = NP. Nunc SN dicatur a; RI, y; SR, x; RP, z; eritque IP = SN − SP = $a - x - z$. Et, ob triangulum IRP rectangulum, habebitur $(IP)^2\ (aa + xx + zz - 2ax - 2az + 2xz) = (RI)^2\ (yy) + (RP)^2\ (zz)$; & $aa + xx - 2ax - 2az + 2xz = yy$; unde elicitur $z = (aa + xx - 2ax - yy) : (2a - 2x) =$ RP. Quod si ponatur FI pro infinite parva, quæ erit $-dy$ (nam abscissa SR crescente, applicata RI decrescet) intelligaturque ducta FB (parallela ad RP) itidem infinite parva, quæ erit dx; habebitur RP $(aa + xx - 2ax - yy) : (2a - 2x)$. RI $(y) ::$ FB (dx). FI $(-dy)$ & ; $2aydx - 2yxdx + aady + xxdy - 2axdy - yydy = 0$ quæ est AEquatio Articuli 51. Ergo vel ex consideratione Tangentis circuli plane liquet, Articuli

modo citati Curvam esse ambitus circuli arcum.

54. Reapse vero, si Radius (*Fig.* 4.) d h f admoveatur ad Parallelogrammi lamellam q n (ut in Art. 41. dictum est) sumaturque distantia inter puncta e atque x, tum Curva designetur ea ratione, quam supra (in Art. 51.) exposuimus; describaturque Circulus, cujus radius sit sumta illa distantia inter puncta e atque x; comperietur perspicue hujusce circuli ambitum cum delineata Curva omnino congruere: quod ita plane esse, toties vidi, quoties experimentum feci.

55. Ex eadem autem superiore AEquatione illud evidentius apparet, quod AEquationes bene multæ, in quibus indeterminatarum separatio non se facile offerat, construi commode possent, algebraicis curvis adhibitis; si aliunde adhibendarum curvarum proprietates aliquæ, differentialibus AEquationibus expressæ, jam innotuissent. Quamobrem extra plurium algebraicarum curvarum ambitus rectas posui lineas; hisque, ceu axibus, usus duxi applicatas ad convexas curvarum earundem partes; atque a punctis iis, in quibus applicatæ curvas attingebant, ductis tangentibus, inde quarundam proprietatum curvarum, tangentium, atque subtangentium ope, nonnullas differentiales AEquationes construxi: in quibus indeterminatæ quantitates harumque differentiæ admodum inter se commixtæ reperiebantur: cum tamen AEquationes illæ propriis adhibitis algebraicis curvis sine labore construi optime possent.

56. Id autem fortassis non inepte conferretur cum ea constructionum ratione, qua adhibitis Coni Sectionibus modus inventus est ad AEquationes duarum dimensionum construendas, ut ut AEquationes illæ nequeant ad Conicarum Sectionum axes pro-

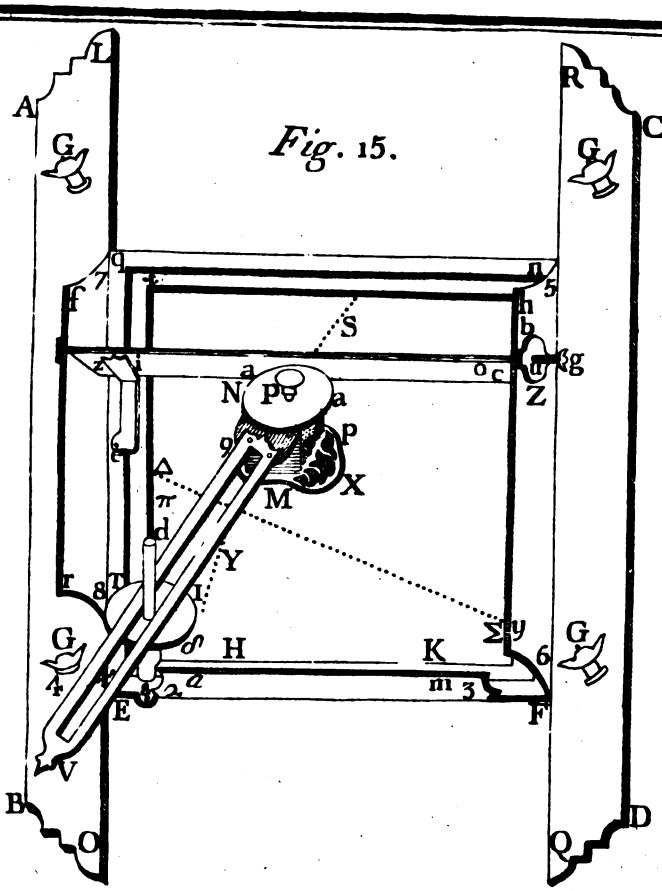


Fig. 15.

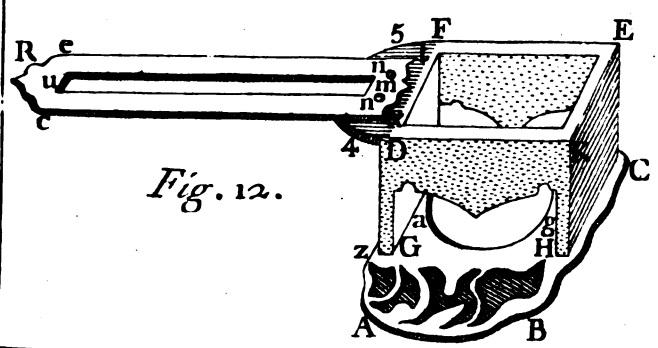


Fig. 12.

proprie referri. Quin consideratio hæc non solius similitudinis loco esse potest, verum etiam potest constructionum harum consideratio artificia illarum constructionum adjuvare.

57. Et quidem, inita ratione illa, nonnullas (ut dixi) differentiales AEquationes inveni, ac quarundam substitutionum ope varias etiam alias efformavi, omnesque in ordinem aliquem redegi, ordiens speciem quamdam Canonis; quem, si persequerer, utilitate aliqua non cariturum, suadet tum materia ipsa, tum illustre exemplum aliorum Canonum, qui in Harmonia Mensurarum Rogeri Cotesii, Viri dum viveret doctissimi, edita a Cel. Roberto Smith, in eundem, in quem ego quoque tetendi, finem reperiuntur. Quibus tamen in AEquationibus expendere attente oportet, & quid eveniret, si constans aliqua aut adderetur, aut demeretur; & quid contingat, cum artificiis aliis in earundem AEquationum indeterminatis separatio tentatur; & quid ex ipsarum genesi, notaque aliunde curvarum natura vestigari queat, ut magis patentes novæ viæ ad Integrationes consequendas inveniantur.

58. Sed hujusmodi res peculiare Opus sibi poscerent, quod profecto præsentis non esset instituti. Nunc e diverticulo (ut ajunt) in propositam viam redeundum est. Quamobrem etiam prætereo, qua ratione Curvarum quarundam aliarum delineationes itidem ope Instrumenti superius jam descripti, nonnullis aliis partibus aucti, tentari possent. Malo transire ad alterum Instrumentum, Logarithmicæ delineationi inserviens, a quo tamen paucioribus me expediam; propterea quod hujusce partium constructio atque usus majori sane facilitate intelligentur ex fusiore Instrumenti prioris expli-

explicatione. In qua longior (& fortaſſis etiam juſto longior) fui ob ſcrupulum neſcio quem, cujus cauſſa verebar, ne ea, quæ ſcriberem, non perinde intelligi legendo poſſent, atque ego ipſe contemplando mente concipiebam. Ceterum ipſius Inſtrumenti partes (etſi multis verbis deſcriptæ) ubi in unum compoſitæ ſubjiciuntur oculis, & transducuntur ad uſum, ita comperiuntur ſtructura conſentientes arcteque compaginatæ; ut reapſe nihil ad Inſtrumenti ſimplicitatem deſiderari poſſe videatur. Quod proportione intelligendum quoque eſt de altero Inſtrumento illo, ad cujus partium deſcriptionem aggredior.

59. z A B C (*Fig.* 12.) eſt lamella longa lineas quattuordecim, lata lineas undecim in extremitate B C, lineas vero quindecim in oppoſita extremitate A z: eſtque valde tenuis, atque pertuſa, gravitatis minuendæ cauſſa, variis foraminibus, quorum maximum eſt a g in medio capſulæ, de qua mox dicam. Propoſitæ autem Figuræ 12. pariterque Figuræ 13. & 14. pleraſque magnitudines juſto majores delineavi; quemadmodum in nonnullis aliis Figuris ſupra in Art. 22., me feciſſe admonui. Itidem in Figuræ 15. parte V N X aliqua eſt, illis iiſdem de cauſſis, proportionum varietas. Super ea lamella (*Fig.* 12.) z A B C eſt Capſula G H K E F D ſimilis illi in Art. 23. jam deſcriptæ: niſi quod, illa craſſioribus formatur lamellis, hæc tenujoribus; illa inſtruitur pediculis n y, 2. 3 laterum G F, H E oppoſitorum, hæc pediculis non adornatur, ſed eorundem laterum G F, H E inferiores extremitates integræ congruunt atque adferruminantur ſuppoſitæ lamellæ z A B C; illa habet ad latus H E adferruminatam craſſam laminam 4. 5, de qua in Art. 24. dictum eſt;

eſt; hæc lamina ſimili 4. 5 inſtruitur, ſed & ab oppoſito latere GF exſtante, & tenuiori ampliorique.

60. teRcx eſt lamella longa ſeptem Pollices (in Figura longitudinem proportione repræſentari Tabella non ſivit) lata lineas octo. Hæc perforatur oblonga fiſſura u m, cujus latera parallela: committiturque cum lamina 4. 5, atque cum hac cochleolis n n arcte connectitur. Radius Curſorius appellabitur lamella hæc.

61. Addimus nunc in *Fig.* 13. ſectiones capſulæ & rotulæ prorſus ſimilium illarum, quas in Art. 25. & 26. ſupra deſcripſimus. Niſi quod, cylindrulus deſinens in capulum P eſt paullo longior; ut circum ipſum, ceu circum axem ſuum, volvi poſſit alia rotula u x, quæ eſt cylindracea (hanc, liceat, Rotulæ Horizontalis nomine appellare) Cujus rotulæ modiolus m s ita eſt perforatus; ut, ſi ſupremam & infimam ejus foraminis partem excipias, nuſpiam cavitate ſua cylindrulum contingat: idque factum eſt, ut eo facilius rotula ſuos gyros conficere queat. Rotulæ ejuſdem diameter undecim lineas ferme adæquat.

62. Quod autem attinet ad planum majoris baſis rotulæ ipſius, ad axem contactus rotulæ ſignatoriæ, ad capſulæ, cui rotula ſignatoria inſerta eſt, immiſſionem in capſulam GHKEFD; quod, inquam, attinet ad hæc; omnia ita ſe habere intelligantur, quemadmodum in Art. 27. 28. 29. 30. jam ſupra deſcripſimus.

63. Mente nunc eſt concipienda lamella cylindracea, circa cujus axem, productum ſuperius, eſt alius cylindrulus, inferius vero baſis, qua lamella fulcitur, deſinens in pediculum. Hæ partes, quæ una conjunctæ ſunt, atque adferruminatæ, dicentur

Suſten-

Sustentaculum Cursorii Radii. Cujus sustentaculi sectio per axem est (*Fig.* 14.) sapnm: nimirum sectio lamellæ est aANn; cylindruli superioris est csme; inferioris basis GR; pediculi p. Axis BS conveniens tum lamellæ cylindraceæ, tum superiori cylindrulo dicetur Sustentaculi Axis.

64. ABOL, CDQR (*Fig.* 15.) sunt duæ laminæ omnino similes, & æquales illis in Art. 33. descriptis, atque intervallo eodem, ac sunt illæ, inter parallelos internos margines dissitæ. Sed cochlea G4 exstat minus ceteris supra summam laminæ ABOL superficiem.

65. EFnq est Parallelogrammum ex lamellis efformatum similibus illarum, quibus in Art. 34. prioris Instrumenti Parallelogrammum compositum esse jam ostendimus. Hujus tamen, de quo nunc agimus, Parallelogrammi omnia latera sunt inter se æqualia; cum singula longitudinem habeant sex pollicum, linearumque circiter decem. Vt autem in primo illo Parallelogrammo lamellæ EHKF alia lamella (de qua in Art. 34.) 2am3 ad angulos rectos adferruminata est; ita in secundo hoc, eodem modo posita, æqualis lamella reperitur. Prætereaque ad laterum Eq, Fn exteriores partes, adferruminatæ sunt duæ aliæ lamellæ, 6yh5 (hæc in Figura impedit, ne latus Fn videatur) & 8rf7, anterioris illius 2*a*m3 similes & æquales (nisi quod sunt paullo altiores) itidemque ad rectos angulos positæ: ut satis ex consideratione Figuræ mente concipi potest.

66. Cum duabus hisce lamellis connectitur alia lamella zico (quam Transversam Lamellam appellabimus) ad utramque extremitatem desinens in alias lamellas cum ipsa ad rectos angulos positas:

&

& harum quæ dexteram tenet extremitatem, est b Z. Inter hanc autem b Z, & transversam illam intercipitur lamella (de qua in superiore Articulo) 6 y h 5; atque ope cochleolæ g u transversa lamella firmiter fixa in positione sua detinetur. Eodemque modo se habet structura in parte sinistra. Quanta est longitudo lamellarum r 7, y 5, tantum etiam spatium est, in quo transversa lamella potest collocari in variis a lamella 2 m distantiis: ubicumque tamen transversa illa lamella collocetur, semper illa ad hanc 2 m parallela esse debet.

67. Prope Parallelogrammi internum angulum, ubi latera K E, q E conjunguntur, Sustentaculum Cursorii Radii firmiter positum est; ejus pediculo (in *Fig.* 14. est p) in subjectam laminam inserto, solidatoque. Super cujus sustentaculi lamellam cylindraceam δ I T (quæ in *Fig.* 14. est a A N n) positus est radius cursorius V 9 (qui in *Fig.* 12. notatur litteris t e R c x) atque in ejus Radii oblongam fissuram (quæ in citata *Fig.* 12. est u m) inseritur cylindrulus d (qui in *Fig.* 14. designatur litteris c s m e) Eaque fissura cylindrulum ipsum ita comprehendit, ut radius V 9 secundum longitudinem moveri possit liberrime, non tamen laxe. Demum altitudo, supra subjectam Tabellam, lamellæ δ I T, & altitudo capsulæ N p ea constitutæ sunt proportione, ut radius cursorius V 9 semper parallelus sit ad eandem subjectam Tabellam; quemadmodum satis indicat ipsa Figura.

68. Prope lamellæ transversæ sinistram extremitatem, inter litteras z & i adnexa est parva lamella z i, cujus pars producta, & ad angulum rectum recurvata, est i e, congruens cum latere q E, cui tamen non adnectitur; sequi enim debet lamellam

trans-

transversam, quocumque hæc transferatur. In productione autem i e ita signatum est punctum e, ut cum rotula horizontalis a a (quæ in Art. 61. descripta fuit; notaturque in *Fig.* 13. litteris u x) cum, inquam, rotula horizontalis a a contingit transversam lamellam, tunc recta linea ducta per punctum e, atque per axem contactus rotulæ signatoriæ parallela sit ad transversæ lamellæ superficiem. Ad partem autem dexteram ejusdem transversæ lamellæ res eodem modo se habet, aliudque punctum est. At ex regione puncti e (idemque intellige qua pertinet ad partem dexteram) est aliud punctum x ibi signatum in latere E q, ut recta linea ducta per punctum hoc, & per axem sustentaculi, parallela sit ad lamellam 2 m. Duo hæc puncta e, x (ut & respondentia puncta ad partem alteram) dicentur Puncta Subtangentis.

69. s t sunt duo Foraminula, quorum centra cadunt in rectam lineam transeuntem per sustentaculi axem, & parallelam ad marginem L O. Quæ (non secus ac in Art. 38. constitutum fuit) dicetur linea asymptoton: atque foraminula illa nomine Foraminulorum lineæ asymptotōn appellabuntur.

70. Nunc transeo ad partium hactenus descriptarum usum; atque ajo, Parallelogrammum E F n q inter laminas A B O L, C D Q R moveri posse liberrime, non secus ac Parallelogrammum alterum, de quo in Art. 39. dictum est. Itaque data Subtangente Logarithmicæ describendæ, hujus longitudini ponatur æqualis distantia inter puncta subtangentis (de quibus in Art. 68.) firmeturque lamella transversa ope cochleolarum (quas in Art. 66. jam descripsimus) Deinde inserta capsula (cujus sectionem exhibet *Fig.* 13.) in capsulam (quæ a

Fig.

Fig. 12. repræſentatur) immittatur in radii curſorii V9 oblongam fiſſuram cylindrulus d (de qua immiſſione in Art. 67. verba jam fecimus) Atque ita ponatur machinula ex duabus capſulis, & rotula ſignatoria compoſita, ut a rotula horizontali a a (de qua in Art. 61. & 68.) tranſverſa lamella contingatur. Tum per duo foraminula s t (quorum poſitiones in Articulo ſuperiore exhibuimus) ſignentur duo puncta, per quæ ſi recta linea ducatur, erit hæc deſcribendæ Curvæ Aſymptoton.

71. Hæc ubi ita conſtituta ſint, extremis digitis lævæ manus trahatur retrorſum lamella 2 *a* m 3, quemadmodum etiam in Art. 42. expoſitum eſt. Eodemque tempore, apice digiti indicis dexteri leviter prematur capulum P, pollicis apice ad lamellam p X M leviſſime applicato (hac enim applicatione certum erit, planum aciei rotulæ ſignatoriæ perpendiculare ad ſubjectam chartam jugiter eſſe) Hoc itaque modo, dum Parallelogrammum retrahetur, ſignabitur a rotula in ſubjecta charta Logarithmica Curva S Y, cui Subtangens illa data conveniet.

72. Quod expedite quidem demonſtrabitur, ubi reſumantur ea Lemmata, quæ in Articulis 44. & 45. jam fuſe protulimus: ex illis enim atque ex Inſtrumenti partium ſtructura & conſtitutione, proclive eſt colligere (ſi attendantur jam dicta in Art. 47. 48. 49, & ad id propoſitum tranſducantur) proclive, inquam, eſt colligere; lineam, ductam ab eo puncto, in quo ſuſtentaculi axis chartam ſubjectam contingit, ad punctum contactus rotulæ ſignatoriæ, eſſe deſcriptæ Curvæ Tangentem. Præterea vero fiet ex ipſa Inſtrumenti ſtructura manifeſtum, lineam conjungentem illud idem punctum contactus ſignatoriæ rotulæ cum puncto e, eſſe

Curvæ ordinatam, hancque comprehendere rectos angulos cum asymptoto ducta per s t (hoc est cum axe) Atque insuper, lineam ex asymptoto abscissam inter punctum, in quo ab ordinata secatur eadem asymptoton, & punctum ab sustentaculi axe notatum in subjecta charta (quæ linea jugiter æqualis erit distantiæ e x) esse Subtangentem, datæ constanti semper æqualem. At curva linea, cujus Subtangens semper est datæ constanti æqualis, est Logarithmica. Ergo curva Instrumento nostro descripta est curva Logarithmica.

73. Neque plura de ejusmodi apodictica probatione esse adjicienda opinor. Non tamen temperare mihi possum, quin aliud probationis genus subjiciam. Notissimum est; ut probe nosti; abscissis in axe Logarithmicæ curvæ existentibus in arithmetica ratione, respondentes ad axem ordinatas in geometrica ratione existere. Quæ Logarithmicæ curvæ proprietas adeo illustris est, adeo facilis exploratu; ut, si proprietas illa constanter reperiatur in curva Instrumento nostro descripta, curvam nostram esse Logarithmicam, nullo sane modo dubitari posse videatur. Verum quoties Curva (*Fig.* 10.) tPV Instrumento nostro diligenter signatur, in ejusque axe BD sumuntur partes ZE, EK, Kx æquales (hoc est abscissæ in arithmetica ratione existunt) ducuntur, que respondentes ordinatæ Zt, EN, KP, xF; toties hæ ordinatæ in geometrica ratione esse reperiuntur. Namque, si ex illis tres inter se proximæ sumantur (caussa exempli) Zt, EN, KP; harumque extremis Zt, KP fiant æquales (*Fig.* 10. & 11.) lineæ LS, LR, in directum conjunctæ in puncto L, atque ideo componentes rectam RS; tum vero super hac ipsa RS describatur semicirculus RCGS,

duca-

ducaturque ex puncto L ad rectos angulos LC; hæc LC intermediæ EN invenitur æqualis. Sed tres illæ (ut facile liquet) LS, LC, LR sunt in geometrica proportione; ergo etiam tres ordinatæ Zt, EN, KP, in eadem geometrica proportione existent: ergo curva tPV, cujus ordinatæ in geometrica sunt proportione, curva Logarithmica est.

74. Porro, ut ut ratio hæc a mechanica proficiscatur mensuratione, ut ut inductione veluti quadam conficiatur; quoniam tamen exploratæ lineæ reperiuntur ejus esse, quæ apprime convenit, magnitudinis; iccirco ratio hæc tantam habet vim, ut satis commonstret, in demonstratione illa, quam paullo superius (in Art. 72.) indicaveramus, vitium nullum inesse posse. Et hæc eadem ratio curvæ Instrumento nostro descriptæ logarithmicam (ut ita dicam) naturam confirmat plane, atque illustrat.

75. Quæ cum ita sint; necesse est, ut quo me contuleram, dum Tractoriæ demonstrationem concludebam, eodem revertar: fatearque, me plane credere, organicum istud artificium cum eo, quo Conicæ Sectiones delineantur, posse jure meritoque conferri. Quod si in horum Instrumentorum usu quis principio exiguam difficultatem aliquam offenderet; is, quæso, periculum faciat etiam Instrumentorum Sectionibus Conicis dicatorum; videatque, num etiam illorum usus difficultatibus suis laboret, si manus exercitatæ non sint. Mihi saltem exercitatione aliqua opus fuit, ut illa, quibus Conicæ Sectiones delineantur, rite tractarem: quamobrem nunc in eam sententiam descendi, ut crederem; nova hæc Instrumenta, non secus ac vetera illa (ne dicam melius quam illa) suis quæque lineis describendis inservire; si tam hæc, quam illa

pari tractentur exercitatione, atque diligentia.

76. Sed jam iterum sentio, me esse longius provectum, quam proposita ratio postularet. Properabo itaque ad finem; ac duo quæ dicenda mihi supersunt, tribus (ut ajunt) verbis expediam. Quorum alterum hoc est: potuisse unum pro utroque Instrumento Parallelogrammum fieri; si secundi (a *Fig.* 15. repræsentati) lamella lateris E q producta fuisset, quemadmodum primi lamella eadem (*Fig.* 4.) E q producta fuerat ad u r; ut jam in Art. 35. dictum est: atque si radii d h f axis d fuisset mobilis, quare potuisset Parallelogrammo pro re nata auferri atque conjungi. At majori commodo studui magis, quam majori compendio.

77. Si Transversa lamella eo construeretur (quod facile esset) artificio, ut oblique poni posset, quemadmodum posita est linea $\Delta \Sigma$ sub constanti acuto angulo $\Sigma \Delta \pi$ (omnes tamen anguli non æque usui esse possunt: & alia nonnulla consideranda occurrunt) Curvæ, quæ tali lamellæ positione describeretur, esset differentialis AEquatio: $adx + bdy = aady : y$.

78. Plura non addam de Curva hac, similibusque. Itaque satis de iis, quæ pertinent ad Epistolam. Quoniam vero jam supra (in Art. 8.) scripseram; mirum mihi videri, de Tractoria curva a paucis omnino pauca tradita reperiri; iccirco Commentariolum (qualecumque est) de eadem illa curva subjeci. Nunc autem Epistolæ jam nimis longæ, auctæ etiam Commentariolo, accessionem non adjungam, caussas, cur longior fuerim, excusando. Video enim, cavendum mihi esse, ne ipsa longitudinis excusatio Epistolam longiorem efficiat: neve ipsa purgatio tædii novum tædium inducat. Vale. Patavii. Kal. Septem. CIↃIↃCCXXVIII.

P. S.

P. S.

Quanquam mihi conſcius eram diligentiæ meæ in his perſcribendis, ſubjiciendiſque Inſtrumentorum Figuris; tamen hærebat animo (ut Tibi, Iacobe Ornatiſſime, ſuperius ſignificavi) ſcrupulus, ne non ſatis ea apparerent; itaque ubi hæc ederem, oboriretur alicui ſuſpicio, hallucinatum me, putantem vidiſſe quæ non viderim. Ergo oculatos teſtes eſſe volui Abbatem Antonium Co: de Comitibus Patricium Venetum, Gabrielem Manfredium, Iacobum Co: Riccatum, Viros Præſtantiſſimos, atque, ut noſti, Mathematicarum artium callentiſſimos, miſſis ad illos Inſtrumentis ipſis, quibus uterentur ad explorandum, atque experiendum. Res plane habere, ut ego exiſtimavi, his viſa eſt. Litteræ teſtantur: quas quominus ederem, impediebat primo pudor; laudes enim continent, quæ pro eximio quodam eorum erga me amore, longiſſime ſuperent, ſi quid forte propterea merui. At deinde veritus, ne aliter quam negotium eſt, alii interpretarentur, acciperentque, plane exiſtimavi, non opportunum modo eſſe, ſed etiam neceſſarium, niti teſtimonio Virorum talium: itaque conſtitui ad extremum eas Litteras & Tecum communicare; & etiam proferre, ratus qui legerint æqui bonique conſulturos.

ANTONIVS DE COMITIBVS

Ioanni Poleno S.

„ EST profecto, cur tibi, Vir Clariſſime, gratu-
„ ler impenſe, quod Mathematicorum Europæ
„ omnium primus ſenſibus ſubjeceris utilitatem

„ Cur-

„ Curvarum Transcendentium, Instrumentis inven-
„ tis duobus, quorum haud facile statuerim, com-
„ mendemne magis simplicem, accuratamque stru-
„ cturam, an expeditum usum, tutumque. Priusquam proficiscerer in Galliam, curarat Io: Baptista Vrsatus, cujus amici immaturo fato erepti memoria nunquam sine dolore recurrit, argentea instrumenta fabricanda, qualia adhibuerat Hospitalius Marchio ad describendas Coni Sectiones. Memini tamen, sedulo experientibus sæpius apparuisse, quod filum æquabiliter tensum non esset, pluribus in punctis Curvæ abruptam continuitatem: ut proinde hæc censeam, nulla parte cum iis, quæ a te sunt reperta, posse comparari. Paucis ante diebus per Instrumenta a te Venetias missa cernere mihi datum fuit non semel, sumptis in Logarithmica Ordinatis tribus continue proportionalibus, quæ media illarum erat, ne punctum quidem defecisse a media proportionali, quæ duceretur in Semicirculo, cujus diameter constabat ex duabus aliis ordinatis. Inde mecum ipse reputans consilii tui rationem, felicemque exitum, mirum est quantum perceperim voluptatis: omninoque temperare mihi nequeo, quin hac de re perscribam quamprimum ad Mathematicos Gallos, & Britannos. Vtinam Instrumenta ipsa, quæ elaborari curasti, perferrentur Lutetiam, ac Londinum; quo citius clariusque apparerent, quæ quantacumque adhibeatur diligentia, significari per Figuras non satis fortasse possint. Cæterum jure sibi hinc tribuerit aliquid Italia nostra, cujus e scholis profluxit inventum tam præclarum. Cavalerius primas suppeditavit ideas novi Calculi; eoque arbitror ab Fontenellio non

„ insci-

„ inscite appellatum Præcursorem infinite parvo-
„ rum. Britanni porro, Germani, atque Galli ad
„ ea perficienda contulerunt operam, accommo-
„ dandaque Theoriæ Curvarum Transcendentium.
„ At æquum tandem erat non suaderi modo, ve-
„ rum etiam persuaderi illis, qui minus acuti ta-
„ lia calumniantur, non fuisse has ideas Metaphy-
„ sicas, sed plane Mathematicas; unde, tamquam
„ ex fonte uberrimo, plurima promanant, quibus
„ accessio magna fiat non ad Geometriam minus,
„ quam ad Mechanicem ipsam, cujus in usibus,
„ quemadmodum solerter vidit Newtonus in præ-
„ fatione Libri de Principiis, fundatur Geometria;
„ quippe quæ nihil sit aliud ad extremum, quam
„ pars Mechanices Vniversalis. Tibi hoc debemus,
„ Ioannes Doctissime, quod vera hæc cernere ocu-
„ lis, quasique manu tangere jam possumus: ne-
„ que dubium est, quin per ab te demonstrata pan-
„ di queat via ad Mechanicam descriptionem Cur-
„ varum aliarum, quæ complicatiores sint, quæ-
„ que fortasse proveniant a motibus maxime sim-
„ plicibus, quos non satis advertimus. Perge
„ Vir Cel. juvare augereque Mathematica nostra.
„ Vale.

Venetiis. Non. Nov. CIↃIↃCCXXVIII.

GABRIEL MANFREDIVS

Ioanni Poleno S. P. D.

„ LEgi tandem quas mihi legendas misisti litte-
„ ras, quibus inventum tuum ad organicam
„ Tractoriæ, ac Logisticæ descriptionem, quæ tua
„ est ingenii præstantia, mira perspicuitate expla-
„ nas, inque clarissimam lucem profers: missaque

„ item

„ item ad me ipsa Instrumenta tractavi. Etsi
„ autem non tantum mihi tribuo, ut de eximiorum
„ Virorum cogitatis judicem me præstare audeam,
„ tamen quando sententiam meam de invento tuo
„ requiris, aperte dicam, nihil in organica tua de-
„ scriptione ad simplicitatem, nihil ad utilitatem,
„ praxisque geometricæ incrementum desiderari.
„ Vbi semel manus operi modica exercitatione as-
„ suevit, adeo proclivis est linearum designatio,
„ ut ausim dicere, ipsarum Sectionum Conicarum
„ per vulgata illa Instrumenta delineationem, ne-
„ quaquam cum ista tua (quoad operis facilem tu-
„ tamque executionem) esse comparandam; quod-
„ que in hac re præcipuum est, ope Instrumenti
„ Tractoria, aut Logistica describitur, quæ ad statu-
„ tum quemdam præscriptumque modulum, nem-
„ pe sive ad Tangentem, sive ad Subtangentem ex-
„ acta sit. Quod quidem quantum in universa re
„ Geometrica afferat utilitatis, nemo non videt; ni-
„ hil enim tam frequens est tamque obvium, quam
„ ut in geometricis compositionibus ad Logisticam,
„ cujus Subtangentis longitudo sit præfinita, aut
„ ad alias id genus Curvas sit confugiendum. Qua-
„ propter is de praxi geometrica optime meritus
„ censendus est, qui Logisticam, tam necessariam
„ scilicet lineam, summa facilitate in charta exa-
„ rare docuerit, quo præsidio si careamus, nullum
„ propemodum ex mathematicis speculationibus
„ fructum in Mechanicarum artium usus transfer-
„ re licebit. Itaque si evulgaveris, non ingenio tan-
„ tum & venustate, sed utilitate ac commodo in-
„ ventum tuum se etiam atque etiam commenda-
„ bit. Vale.

Bononiæ. Pridie Id. Decem. CIↃIↃCCXXVIII.

IAC-

IACOBVS RICCATVS

Ioanni Poleno S. P. D.

„ QVAE duo a Te excogitata atque inventa In-
„ ſtrumenta ſunt, ut curvas binas, Logarith-
„ micam & Tractoriam, hodiernæ Geometriæ ap-
„ prime neceſſarias, quæque numero cenſentur Tran-
„ ſcendentium Curvarum, mechanice deſcriberes,
„ expendi diligenter; mirificeque ſum iiſdem dele-
„ ctatus. Ac quod noſtro hoc genere rectiſſime æſti-
„ mantem facere oportet, ut traducat ad pericu-
„ lum, ſemel ipſe iterumque tranſtuli. Re, admi-
„ ratione haud levi, ſic inveni: eas lineas inde ori-
„ ri, & mihi exiſtere, quas utpote natura ſua, ac
„ indole obſcuras & difficiles, mente dumtaxat &
„ cogitatione antea præceperam; ita porro clare ac
„ diſtincte eas deſcribi, ut ne notæ quidem vulgo
„ Coni Sectiones certius in plano, ac luculentius de-
„ lineari ratione ulla mihi poſſe videantur. Sed ex
„ rebus omnibus puram ſimplicemque rationem de-
„ miratus ſum, qua rem ipſam ſtruis ex proprietati-
„ bus earundem Curvarum, quarum altera Tangen-
„ tem, Subtangentem altera conſtantem jugiter ha-
„ bet. Cæterum hæc ipſa ſimplicitas, quæ tantopere
„ adamatur, cum prima exiſtere & apparere deberet,
„ latens tamen eſt, detegiturque extrema: quo fit, ut
„ ego putem, in quocumque artificio difficillimum
„ eſſe videre ac cernere, quam facile ad exitum pro-
„ poſita res perduci queat. Namque poſt Neperum
„ id inſtituerunt Mathematici, ut plurimum operæ ac
„ ſtudii Logarithmicæ tribuerent; & aliquanto poſt
„ de Tractoria cogitarunt. Earum proprietates illuſtra-
„ vere; atque ad quadraturas, rectificationes, menſu-
„ ras corporum ſolidorum, horumque ſuperficierum

S „ uſque

„ usque penetrarunt. At nemo unus adhuc inventus
„ est, qui de organica constructione Curvæ utriusque cogitaverit, aut tanquam problema aliquod proposuerit. Tu tamen rem investigasti, nobisque eodem tempore felicissime adaperuisti.

„ Renatus Cartesius, Vir de Mathematicis Scientiis optime meritus, nullam aliam ob caussam curvas Transcendentes repulit a Geometria, nisi quod ea ratione illi non occurrerent, qua exprimere Curvarum naturam consuevit; analyticis nimirum æquationibus, quas quantitates duæ indeterminatæ ingrederentur. Sed hoc haud recte factum ab Renato, qui sic existimavit, tam longe porrigi Geometriæ fines, quam suæ methodi regio proferretur.

„ Mihi præ cæteris Newtoni, Viri incomparabilis, sententia probatur. Sic enim ille existimabat, ut in Geometria elementari, ceu bina Postulata, assumebantur ductus rectæ lineæ de puncto ad punctum, atque descriptio circuli ad quodlibet intervallum; ita in sublimiori id contingere, ut Curvarum constructiones toridem sint Postulata; quæ deinde ad indolem Problematum pertineant; quorum solutio a Mechanica, non a Geometria sit expectanda. Munus est Geometræ investigare & expendere Curvarum naturam; ideam illarum exprimere distinctam; idque palam facere, qua ratione progignantur; denique ex earum origine commonstrare; eas non contradicentium numero, sed ejusmodi rerum, quæ fieri possunt, contineri. Ac quamdiu proprietatibus illarum utitur, ut propositis quæstionibus difficilioribus satisfaciat, res versatur ipsa in contemplatione sola: cum vero hinc ad usum operamque rem traducit, Mechanica sæpissime opus est, & iis instrumentis, quæ ad manum pertinent.

„ Porro

„ Porro Mechanica motu opportune uti solet, quem
„ tamen Ars temperet ac moderetur. Ad Artem vero
„ spectat, adjuncta omnia versare in singulas par-
„ tes, & expendere vel defectus ipsos materiæ, a qua
„ omnino abstrahit Geometria. Qui trahens pondus
„ aliquod, obligatum funè, arbitraretur, ea ratione,
„ se describere Tractoriam; aut Catenariam, binis
„ clavis funem suspendens; aut Elasticam, chalybis
„ flectens laminam; curvarum istiusmodi ob oculos
„ haberet rudem quamdam imaginem: materies
„ enim, ad eas curvas perfecte referendas, nequa-
„ quam est accommodata. Et multa quidem præter-
„ ea hujusmodi addere possem exempla.

„ Qui curvarum focis, funiculisque adhibitis, cur-
„ vas describunt, accuratius rem tractant; dum ta-
„ men ne foci multiplicentur & funiculi; namque si
„ hi frictionibus sint pluribus obnoxii, inæqualiter
„ extenduntur: resque minus procederet, cum infi-
„ niti foci essent; & cum funiculum adaptari opor-
„ teret alicui curvæ, ut in Evolutis Hugenii. Neque
„ hoc prodest, filorum loco substituere catenulas;
„ cum, curvæ loco, tunc polygonus conformetur.

„ Mea est igitur sententia, ex omnibus constru-
„ ctionibus mechanicis illas plurimi faciendas, quæ
„ conficiuntur per Instrumenta solidis firmisque re-
„ gulis formata, in quibus nullus esse locus potest
„ incommodis, quæ commemoravi. Neque quic-
„ quam aliud, ut res undique perfecta sit, requiritur,
„ nisi ut organi constructio accurata ac simplex sit.
„ Ex Veteribus autem Nicomedes nobis ejusmodi ex-
„ emplum reliquit, & quidem præclarum, in Conchoi-
„ dis constructione; & ex novissimis nonnulla habe-
„ mus pro aliquibus curvis ex numero analyticarum.

„ Ad Te autem unum ea jure pertinebit laus, quod

„ curvas Transcendentes (ut ita dicam) indole asperas,
„ quodammodo mansuefeceris; deque contemplatione
„ ad operam, ex Geometria ad Mechanicam transtu-
„ leris. Instrumentis a Te nuper inventis nihil aut
„ ad rem aptius, aut simplicius potest excogitari.

„ Quod ad usum attinet; quis ignorat, Transcen-
„ dentes quæstiones partem magnam ad Hyperbolæ
„ quadraturam referri, aut ad Logarithmicæ descri-
„ ptionem? Sint Problemata, aut localia, aut determi-
„ nata; hoc est, sive adhibenda sit integra Curva, aut
„ ejus pars aliqua; vel secari ipsa debeat ab aliqua nota
„ alia curva, ut signari possint quæsita puncta: cum
„ Geometra arbitrabatur, se tandem industriæ, & in-
„ vestigationis suæ finem attigisse; sic inveniebat et-
„ iamnum circum initia se quodammodo versari. Ita-
„ que necesse illi erat approximationum methodis uti;
„ ac vel Series, vel Logarithmorum Tabulas adhibe-
„ re: hacque ratione, Geometriæ cancellis veluti
„ egressus, in fines Arithmeticæ pertransire.

„ Geometra deinceps usum Logarithmicæ ac Tra-
„ ctoriæ perinde retinere facile poterit, ac si una usu-
„ rus esset aliqua Coni Sectione, atque, ferme dixi,
„ circulo ipso. Ceterum ut opus tantopere utile
„ omnino perficiatur, sine, Tu, ut hoc Ego injiciam,
„ ut Tibi ponas etiam ante oculos Curvas quibus
„ arcuum circularium rectificationes continentur;
„ quemadmodum Cyclois, Linea item Sinuum, aut
„ alia quæpiam analoga; tentando hoc maxime, ut
„ organice describantur. Ita enim fiet, ut Mechani-
„ ca & Geometria novo, neque minore, invento
„ adaugeantur. Præstare hæc posse melius Te nemi-
„ nem puto, qui in istiusmodi rebus non contemplan-
„ dis modo, sed etiam persequendis excellis. Vale.

Castrofranco. X. Kal. Apr. CIↃIↃCCXXVIIII.

DE

DE CVRVA TRACTORIA

COMMENTARIOLVM.

QVO PROBLEMATVM AC THEOREMATVM DE EADEM CVRVA A CELEBERRIMIS GEOMETRIS PROPOSITORVM DEMONSTRATIONES CONTINENTVR.

NON novas hic dari calculorum ineundorum rationes, sed calculos; cum res ipsa loquetur, tum principio profiteor. Nihilo tamen minus profero hæc lubens, ea de caussa; ut si organi nostri in Tractoria describenda is usus esse queat, quem Chr. Hugenius (ut in superioris Epistolæ meæ Art. 19. dictum est) optaverat; Curvæ, magno hercle usui futuræ, clariore in lumine proprietates, atque natura collocentur. Quarum proprietatum plerasque a Summis Geometris propositas quidem inveni; at nullas uspiam inveni earundem demonstrationes; si excipias unam, aut alteram, de quibus mentio fit paullo infra: ubi Definitionibus subjeci Propositiones G. Gul. Leibnitzii, P. Guid. Grandi, & Chr. Hugenii, quas demonstrandas susceperam, ipsis illorum verbis expressas: additis ad paginarum margines numeris Articulorum, quibus respondentium Propositionum demonstrationes meæ continentur. Solummodo litteras, quæ Figuris adponuntur, in Leibnitzii Propositionibus, ut etiam in Theoremate P. Grandi, facilitatis caussa, mutavi.

Definitiones.

1. Si detur (*Fig.* 2.) Linea Curva AKO, cujus Asymptoton (sive etiam Axis) sit recta linea DN, ea autem sit Curvæ natura, ut cunctæ portiones quarum-

quarumcumque Tangentium A D, K N interceptæ inter Curvam A K O, & Asymptoton D N, sint constanti datæ Z æquales; Curva hæc appelletur Tractoria.

2. Quælibet linea, ut K T, ducta ab aliquo Curvæ puncto K normalis ad Asymptoton, dicatur Applicata ad Asymptoton: eritque D T ei conveniens Abscissa.

3. Tangens A D, quæ cum Asymptoto angulos rectos facit, appelletur Maxima Applicata ad Asymptoton; sive dumtaxat Maxima Applicata; vel Prima Ordinata.

4. Maximæ Applicatæ ad Asymptoton punctum cum Curva commune A appelletur Vertex Tractoriæ: punctum vero cum Asymptoto commune D, dicatur Initium Asymptoton.

5. Recta A M, ducta per Verticem A parallela ad Asymptoton D N, dicatur Tractoriæ Axis secundus.

6. Et quælibet linea, ut K M, ducta ab aliquo Curvæ puncto K normalis ad secundum Axem, Applicata ad secundum Axem dicatur: eritque A M ei conveniens Abscissa.

7. Si Asymptoton D N producta parte altera D F, factoque centro in Initio Asymptoton D, intervallo D A (æquali Tangenti constanti Z) describatur Circuli arcus A Y F; Circuli Quadrans A Y F D appelletur Quadrans Conjugatus.

Corollarium.

8. Hinc autem evidens est, radio F D, una cum Quadrante Conjugato, fluente secundum Tractoriæ Asymptoton D N, obtinenteque situm quemvis g a, & ejus arcu g e u secante Tractoriam in puncto e, evidens (inquam) est; Curvam Tractoriam A e K O ab arcu Quadrantis g e u semper secari ad rectos angu-

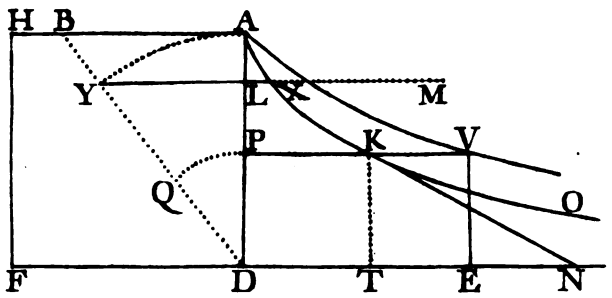


Fig. 18.

Φ

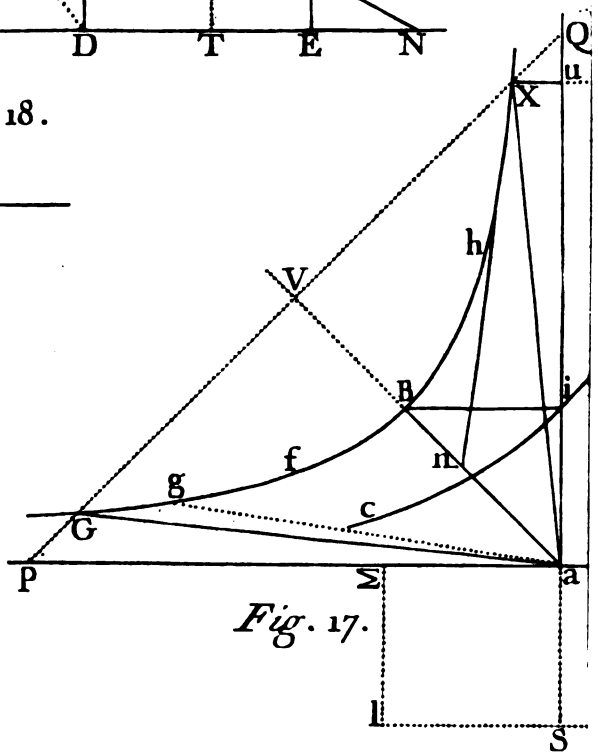


Fig. 17.

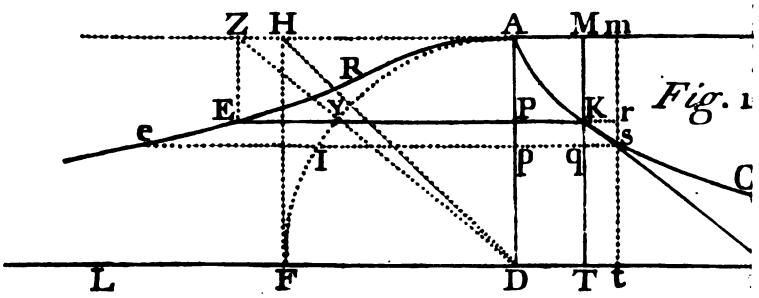


Fig. 1

angulos. Tractoriæ enim in puncto e tangens e a *est radius Quadrantis; ut vero fert Circuli natura, tangens arcus g e u in puncto e angulos rectos efficit cum radio, seu tangente e a: ergo liquet, etiam duas illas Curvas, Tractoriam A e K O, & Quadrantis arcum g e u (quarum tangentes per punctum earum commune e ductæ rectos comprehendunt angulos) rectos itidem angulos efficere; hoc est, se ad rectos angulos intersecare. *Art. 7.

Problematum, ac Theorematum demonstrandorum Propositiones, prout Auctorum verbis expressæ sunt.

G. Gul. Leibnitzius in *Actis Eruditorum, quæ Lipsiæ publicantur* (A. CIƆIƆCLXXXXIII. pag. 388.) habet hæc.

9. *. *Centro* D (*Fig.* 16.) *ubi* DA *simul est ordinata et tangens Curvæ* (Tractoriæ AKO) *radio vero* DA *describatur circulus* (hoc est, quadrans conjugatus) AYF, *axi* LDN *occurrens in* F, *et huic axi parallela sit* AZ, *cui ex* D *educta* DY *occurrat in* Z; *erit* AZ *tangens arcus circularis* AY. *Iam per* Y *ducatur* YPK *parallela axi* DN, *occurrens ipsi* AD *in* P, *et Curvæ* AKO *in* K, *in qua producta sumatur* PE *æqualis* AZ, *idemque ubique faciendo, prodibit Linea Tangentium* ARE. *Art. 36.

10. * *Et rectangulum* ADT *reperietur æquari Figuræ Tangentium, seu Areæ trilineæ* APEA; *nimirum* AD *in* DT *producet æquale trilineo* APEA. *Art. 40.

11. * *Cum igitur Figuræ Tangentium Area exhiberi possit per quadraturam Hyperbolæ,* *Art. 44.

12. * *Vel per Logarithmos, ut notum est* (qui tamen de Linea Tangentium, vel de ejus quadratura scripserit, ego quidem inveni neminem) *Art. 53.

13. * *Patet ejus* (quadraturæ areæ Tangentium) *ope etiam haberi* DT, *seu* PK, *adeoque punctum Curvæ, ut* K. *Art. 56.

14. § *Vi-*

*Art.57. 14. * *Vicissim hinc data descriptione lineæ* AKO *Quadratura Hyperbolæ* obtinebitur.

*Art.58. 15. * *Vel Logarithmi construentur.*

P. Gui. Grandus in *Geometrica Demonstratione Theorematum Hugenianorum* (pag. 182.) hoc dat Theorema:

*Art.51. 16. * *Si intelligatur curva* (*Fig.* 16. & 17.) AKO *esse Tractoria, cujus prima ordinata* AD, *axis* DN, *sitque* B *vertex*, a *centrum Hyperbolæ æquilateræ, cujus semitransversus axis* aB (=AD) *Ducta ex quovis puncto* P *axi Tractoriæ parallela* PK: *erit triangulum basi* AD, *altitudine* PK, *æquale hyperbolico trilineo, axis portione* nB, *tangente* nX *hyperbolam, & curva intercepta hyperbolæ comprehenso: uti ex nostra doctrina de Figuris Correlatis deduci potest.* Ego vero demonstrationem non ex illis principiis, sed ex calculis, quos jam proposueram, quæsivi.

In Chr. Hugenii *Operum Volumine II.* (pag. 508. 509. & 510.) habentur Theoremata, ac Problemata, quæ subjeci:

*Art.34. 17. * *Curva* Tractoria (*Fig.* 2.) AKO *pariter extenditur ad alteram partem perpendicularis* AD.

*Art.64. 18. * *Vt invenias rectam lineam æqualem portioni hujus Curvæ* (*Fig.* 20.) *datæ a vertice* A, *ut* AK (*sic enim invenies alias portiones quascumque*) *duc* KP *perpendicularem ad* AD, *& descripto arcu circuli* PQ, *qui habeat centrum* D, *& radium* DP, *quære in* AB *parallela Asymptoton punctum* B, *quod sit centrum circumferentiæ circuli, quæ transit per* A, *& tangit arcum* PQ, *quod facile est; porro ducta recta* BD, *sume in illa* DY=DA, *& e puncto* Y *duc parallelam Asymptoto usque ad curvam in* X, *tunc* YX *erit æqualis curvæ* AK. Demonstrationis hujusce Problematis compendium quoddam dedit Monmortius in elegantissimo Opere, cui titulum fecit *Analysis Ludorum fortuitorum* (pag. 360.) sed mendum aliquod typographicum irrepsit; resque concinna

quidem

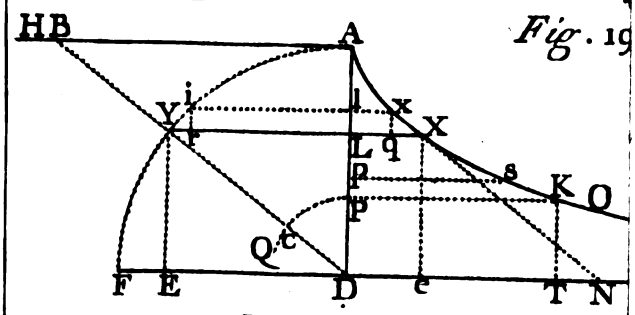


Fig. 19

Fig. 20.

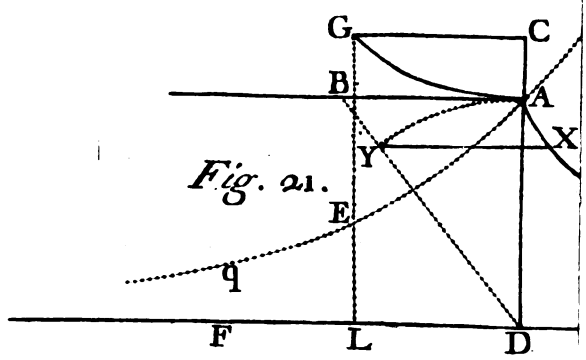


Fig. 21.

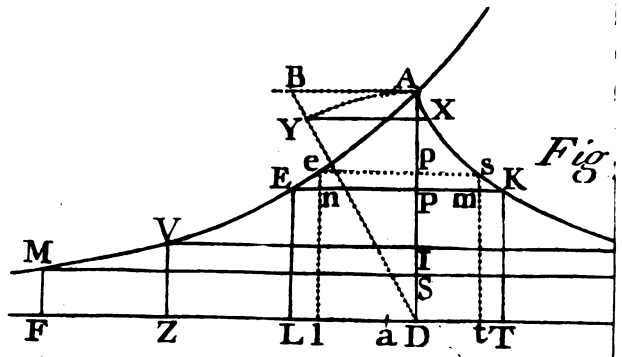


Fig.

quidem, sed (ut videtur) paullo pressior.

19. * *Natura* (*Fig.* 22.) *hujus lineæ* (Tractoriæ AKO) *talis est, ut si sumas tot proportionales, quot volueris, in recta* AD *incipiendo a* D, *ut* DS, DI, DP *&* *ducas applicatas* SR, IO, PK: *partes interceptæ curvæ, ut* RO, OK, *omnes sint æquales*. Hujus Theorematis P. Grandus in suo jam citato Libro (pag. 40.) demonstrationem synthetica (ut appellant) ratione indicavit: calculis ego meis adhibitis idem analytice demonstravi. *Art. 75.

20. * *Ad quadraturam* (*Fig.* 18.) *Hyperboles quoque inservit curva hæc* Tractoria. *Art. 67.

21. * *Nam eadem recta* YX *facit cum* AD *rectangulum æquale spatio Hyperbolico* ADEV, *terminato lineis* AD, EV, *perpendicularibus ad* FDE, *unam ex Asymptotis, & quæ sunt inter se in ratione* AD *ad* DP, *si Hyperbola* AV *sit AEquilatera, & quadratum ejus ad angulum Asymptoton sit* ADFH. *Art. 66.

22. * *Vnde reciproce patet quomodo queant & inveniri puncta hujus curvæ* Tractoriæ, *posita quadratura Hyperboles*. *Art. 68.

23. * *Spatium* (*Fig.* 16.) *infinitum, inter curvam* Tractoriam, *Asymptoton, & rectam* AD *est æquale quartæ parti circuli, cujus radius est* AD. Hoc Theorema a P. Grando in citato suo Libro (pag. 97.) demonstratum est, adhibita sua de Figuris Correlatis doctrina: ego vero, ut etiam supra (in Art. 19.) dixi, ratione alia idem demonstravi. *Art. 76.

24. * *Solidum infinitum, quod producit hoc spatium rotando circa Asymptoton, est æquale quartæ parti sphæræ ejusdem radii*. *Art. 77.

25. * *Superficies ejusdem solidi infiniti, sine basi, est æqualis circulo, cujus radius est diagonalis quadrati ex* AD. *Art. 78.

Data descriptione Curvæ Tractoriæ; habentur, *inter alia, determinatio punctorum Catenariæ, & Logarithmi*.

26. * *Si enim* (*Fig.* 21.) BY *sit* = AC, *quæ sumitur* *Art. 79.

in axe Catenariæ, idest DB=DC, *applicata ejus* (Catenariæ) CG *erit* =YX.

*Art.72. 27. * *Et eadem quoque* (*Fig.* 22.) YX *est Logarithmus rationis, quam habet* AD *ad* PD; *idest æqualis est distantiæ duarum linearum* AD, PD, *vel aliarum duarum quarumcumque, quæ eandem habent rationem ordinatarum perpendicularium ad Asymptoton Lineæ Logarithmicæ, quæ habet* DA *pro subtangente universali.*

*Art.73. 28. * *Unde possunt inveniri Logarithmi Tabularum.*

Hactenus illi. Inter ea, quæ sequuntur, relatarum Propositionum Demonstrationes continentur.

Propositio I.

29. Tractoriæ (*Fig.* 2.) AKO naturam analytica æquatione determinare.

Data sit Tractoria AKO, cujus ad asymptoton maxima Applicata AD dicatur a; applicata KM ad axem secundum AM appelletur z; abscissa AM=DT nominetur x; eritque (producta MK in T usque ad asymptoton) KT=$a-z$; & ex puncto K ducta Tangens KN=*AD erit = a. Ob triangulum autem KTN rectangulum in T, erit KN^2(aa)−KT^2($aa-2az+zz$)=TN^2($2az-zz$). Igitur TN=$\sqrt{(2az-zz)}$. Concipiatur applicata mt infinite proxima applicatæ MT; atque ex punctis K & s ductæ sint Kr, sq parallelæ ad Mm=Tt, eruntque hæ singulæ = dx, & rs=dz. Atque ob triangula similia Krs, KTN, habebitur analogia hæc; rs(dz).Kr(dx)::KT($a-z$). TN($\sqrt{(2az-zz)}$); & hinc $dz\sqrt{(2az-zz)}=adx-zdx$; qua æquatione Tractoriæ AKO natura determinatur. Q.E.F.

*Art. 1. & 3.

Corollarium I.

30. Hinc habetur $dx=dz\sqrt{(2az-zz)}:(a-z)$.

Cor-

Corollarium II.

31. Si consideretur KT applicata ad asymptoton, quæ dicatur y (posito itidem $dx = qs = Tt$) erit $y = a - z$; sive $a - y = z$; & $-dy = dz$. Quare si in *superiore æquatione $dx = dz\sqrt{(2az - zz)} : (a - z)$ loco quantitatum z, & dz substituantur earum valores $a - y$, & $-dy$, fiet $dx = -dy\sqrt{(aa - yy)} : y$; qua itidem æquatione natura Tractoriæ AKO exhibetur. *Art.30.

Corollarium III.

32. Vbi abscissæ DT fixum initium habent in puncto D; per se patet, differentiis applicatarum KT ad asymptoton convenire signa contraria iis signis differentiarum, quibus afficiuntur abscissæ. Dum enim applicatæ KT fiunt st, & decrescunt, abscissæ DT fiunt Dt, crescuntque; & contra.

Corollarium IIII.

33. Si curvæ arcus AK appelletur s, erit ejusdem curvæ differentia $= Ks = ds$; & $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Est autem *$dx = -dy\sqrt{(aa - yy)} : y$; & $dx^2 = (aady^2 - yydy^2) : yy$; quamobrem $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(aady^2 : yy)} = ds$; unde habetur $ds = ady : y$. Quod si considerentur signa + — adnectenda differentiis dy, ds; comperiemus, ubi agatur de arcu AK, signa semper contraria esse oportere; dum enim y decrescit, & KT fit st (afficiturque ejus differentia signo —) arcus AK crescit, & ex AK fit As (afficiturque hujus differentia signo +). Contrarietas eadem est, si st crescat, & fiat KT; tunc enim habetur $+dy$, & $-ds$. *Art.31.

Propositio II.

34. Curva Tractoria extenditur etiam ad alteram partem Maximæ Applicatæ AD.

Nam

*Art 31. Nam posita æquatione * $dx = -dy\sqrt{(aa-yy)}:y$, si extendatur x etiam ad partem negativam ab D versus F, habebitur eadem illa æquatio (mutato signo) $-dx = -dy\sqrt{(aa-yy)}:y$, & fiet curvæ extensio A G ad alteram partem maximæ applicatæ A D.

Scholium.

Superior Propositio ita explicata fuit, ut Doctissimi Hugenii Theorema, quoad ejus fieri posset, declararetur. Cæterum caute in hujusmodi re agendum est; propterea quod una eademque differentialis æquatio convenire optime potest variis Curvis dissimilibusque omnino inter se, neque sane reputandis pro unius ejusdemque curvæ partibus. Quod hoc loco sufficit indicavisse.

Propositio III.

35. Tractoriam, ope Machinæ, organica ratione describere.

Machinæ, conducentis ad solutionem hujusce Problematis, constructio & usus in Epistola mea superius posita fuse explicantur; ibidemque est descriptionis Tractoriæ propositæ demonstratio. Ea igitur machina, Curva describitur, descriptionisque demonstratio illa adhibetur; itaque Tractoria, ope machinæ, organica ratione descripta habetur. Q. E. F.

Propositio IIII.

36. Lineæ Tangentium (*Fig.* 16.) ARE naturam determinare.

Axis AD dicatur a, ejus abscissa AP dicatur z; applicata EP, u; erit $DP = AD - AP = a - z$; &, ob proprietatem circuli, $PY = \sqrt{(2az - zz)}$. Quoniam autem triangula DPY, DAZ sunt similia (ut

* pa-

* patet ex curvæ constructione) itaque habebitur *Art. 9. DP($a-z$). PY($\sqrt{(2az-zz)}$)::DA(a).AZ=EP(u); ergo $au-zu=a\sqrt{(2az-zz)}$; & deinde quadrando, $aauu-2azuu+zzuu=2a^3z-aazz$; qua æquatione determinatur Lineæ Tangentium natura. Q.E.F.

Corollarium I.

37. Hinc habetur $u=a\sqrt{(2az-zz)}:(a-z)$.

Corollarium II.

38. Hinc etiam liquet, esse AD × YP $=a\sqrt{(2az-zz)}$; & (AD × YP) : $2=a\sqrt{(2az-zz)}:2$.

Corollarium III.

39. Si Abscissa z sit $=a=$AD, erit $a-z=0$, hoc est nihilo; & analogia* $a-z.\sqrt{(2az-zz)}::a.u$, *Art. 36. mutabitur in hanc; $0.a::a.u$; atque applicata DL (abscissæ AD conveniens) $=u=aa:0=\infty$. Ergo DL erit Curvæ ARE Asymptoton.

Propositio V.

40. Ex vertice A intelligatur descripta Tractoria AKO, cujus axis secundus sit AM, nimirum ZA indefinite producta ad partes M; asymptoton sit DN, nimirum LD indefinite producta ad partes N, & maxima applicata ad asymptoton sit AD. Tum applicata EP producta occurrat Tractoriæ in K, & per punctum K ducatur ad AD parallela MT, cujus pars KM erit applicata ad axem secundum, pars KT applicata ad asymptoton. Dico, triangulum mixtilineum AREPA esse æquale rectangulo ADTM.

Concipiatur, applicatam e p infinite proximam applicatæ EP, productam pertingere ad Tractoriam in s, ex quo puncto si demittatur applicata s t,

hæc erit infinite proxima applicatæ KT. Nominatis lineis ut *ante, erit $Pp = dz$, & ſpatium differentiale $Ep = udz = adz\sqrt{(2az - zz)} : (a - z)$; ob *$u = a\sqrt{(2az - zz)} : (a - z)$; cujus differentialis integrale eſt triangulum mixtilineum AREPA. Erit autem $KT = PD = a - z$; $Kq = Pp = rs = dz$; &, ſi DT dicatur x, erit $Tt = dx$; quare ſpatium differentiale AD (ſive MT) × $Tt = adx = adz\sqrt{(2az - zz)} : (a - z)$; ob naturam Tractoriæ; quæ dat, ut *ſupra oſtendimus $dx = dz\sqrt{(2az - zz)} : (a - z)$; cujus differentialis integrale eſt rectangulum factum ex AD × DT. Cum igitur ubique tam trianguli mixtilinei AREPA, quam rectanguli facti ex AD in DT ſit unum idemque elementum differentiale $adz\sqrt{(2az - zz)} : (a - z)$; ſequitur, ut triangulum mixtilineum AREPA ſit æquale rectangulo ADTM. Q.E.D.

*Art. 36.

*Art. 37.

*Art. 30.

Corollarium I.

41. Ergo etiam erit AD × DT, ſive AD × PK = $\int adz\sqrt{(2az - zz)} : (a - z)$.

Corollarium II.

42. Data linea aliqua AD, quæ dicatur a, & ex ea abſciſſa qualibet AP, quæ nominetur z, applicatoque ad AD rectangulo ADTM = $\int adz\sqrt{(2az - zz)} : (a - z)$, ſi deinde intelligatur ducta ex puncto P applicata PK ſecans latus TM in K, ſequetur ex iis, quæ ſuperius demonſtrata ſunt, punctum K pertinere ad Tractoriam, cujus Tangens conſtans = AD.

Corollarium III.

43. Si curva ARE, & aſymptoton DL infinite produci intelligantur, erit infinitum ſpatium LDAE comprehenſum curva tangentium, ejus aſymptoto, atque

atque axe AD, æquale rectangulo ex AD in DT infinitam; tunc enim fiet AP = AD; &, quod consequitur, applicata PK congruens asymptoto DN evadet infinita. Atque erit ut rectangulum ex AD in DL infinitam ad infinitum spatium LDAE, ita DL infinita ad DT infinitam.

Propositio VI.

44. Figuræ Tangentium aream exhibere per quadraturam Hyperbolæ æquilateræ (*Fig.* 16. & 17.)

*Vidimus, trianguli mixtilinei AREPA elementum differentiale esse $adz\sqrt{(2az-zz)}:(a-z)$; hujus igitur elementi integrale dabit quadraturam quæsitam. Vt autem id integrale inveniatur, fiat $a-z=m$; eritque $dz=-dm$, & $\sqrt{(2az-zz)}=\sqrt{(aa-mm)}$. Quare fiet $adz\sqrt{(2az-zz)}:(a-z)=-adm\sqrt{(aa-mm)}:m$; &, ducendo tam numeratorem, quam denominatorem in $\sqrt{(aa-mm)}$, erit $-adm\times(aa-mm):m\sqrt{(aa-mm)}$ $=-a^3dm:m\sqrt{(aa-mm)}+amdm:\sqrt{(aa-mm)}$. Ergo a differentia inter integralia horum duorum differentialium præbebitur integrale quæsitum. *Art. 40.

Posterioris differentialis $amdm:\sqrt{(aa-mm)}$ integrale perfectum est $a\sqrt{(aa-mm)}=a\sqrt{(2az-zz)}$.

Prioris $-a^3dm:m\sqrt{(aa-mm)}$ ut habeatur integrale, si fiat $m=aa:n$, erit $dm=-aadn:nn$, & $\sqrt{(aa-mm)}$ $=a\sqrt{(nn-aa)}:n$; atque inde $-a^3dm:m\sqrt{(aa-mm)}=$ $aadn:\sqrt{(nn-aa)}=aadn:2\sqrt{(nn-aa)}+aadn:2\sqrt{(nn-aa)}$. Integrale autem differentialis $aadn:2\sqrt{(nn-aa)}$ obtinetur si construatur Hyperbola æquilatera XBG, cujus semiaxis sit aB = a, & sit aV = $n=aa:(a-z)$. Namque triangulum agG est elementum differentiale $=aadn:2\sqrt{(nn-aa)}$, cujus integrale est triangulum mixtilineum aBfGa (sive aBhXa). Igitur differentialis $-a^3dm:m\sqrt{(aa-mm)}$ integrale = duplo trian-

triangulo a B f G a; hoc eſt, toti triangulo mixtilineo XaGfBhX (cujus trianguli quadratura datur, data Hyperbolæ quadratura) ex eo autem ſi auferatur *Art. 38. $aa\sqrt{(nn-aa)}:n = a\sqrt{(2az-zz)}$* = A D × Y P, habebitur in reſiduo integrale elementi $adz\sqrt{(2az-zz)}:(a-z)$ quadraturæ areæ Lineæ Tangentium; nimirum quadratura trianguli mixtilinei AREPA (= A D × D T, ſive A D × P K). Q.E.F.

Corollarium I.

45. Ergo cum liqueat, eſſe $\int adz\sqrt{(2az-zz)}:(a-z)$ = datæ areæ trianguli Figuræ Tangentium mixtilinei AREPA, liquebit itidem eſſe $\int aadn:\sqrt{(nn-aa)} - aa\sqrt{(nn-aa)}:n$ = eidem areæ AREPA.

Corollarium II.

46. Quoniam a B = a, & a V = $aa:(a-z)$; ſi B V dicatur u, erit $u = az:(a-z)$; & $z = au:(a+u)$.

Corollarium III.

47. Si datus ſit Sector XaGfBhX Hyperbolæ XBG, cujus ſemiaxis a B = a, abſciſſa B V = u; & data ſit Tractoria AKO, cujus tangens conſtans = a; & A D ſit maxima applicata ad aſymptoton D N; abſciſſa A P = $au:(a+u) = z$; deſcriptuſque ſit quadrans conjugatus AYFD; & per punctum P ducta ſit Y K angulos rectos efficiens cum A D, terminata ab arcu quadrantis conjugati, & a curva Tractoria in punctis Y & K; liquet ex demonſtratis ſuperiore in Propoſitione VI., eſſe Sectorem hyperbolicum XaGfBhX − AD × YP = AD × P K: ergo eſt XaGfBhX = AD × YP + AD × PK = AD × Y K. Et illius ſectoris dimidium = dimidio hujuſce rectanguli; nempe aBhXa = (AD × YP) : 2 + (AD × PK) : 2.

Co-

Corollarium IIII.

48. Si concipiatur, Hyperbolæ latera BhX, BfG, & asymptotos aQ, ap infinite produci; infinitum spatium LDAE (de quo *supra dictum est) curva Tangentium, ejus asymptoto, & axe AD comprehensum, erit æquale infinito spatio interjecto inter Hyperbolam & ejus asymptotos, demto quadrato semiaxis aB. Tunc enim trianguli XaGfBhX latera aX, aG congruent asymptotis aQ, ap; & rectangulum ex AD in YP (YP jam æquante AD) æquabit quadratum axis AD æqualis semiaxi aB Hyperbolæ. *Art. 43.

Propositio VII.

49. Positis iisdem, quæ prius, si in semiaxe aB sumatur $Bn = AP = au:(a+u) = z$, & ex puncto X ad punctum n ducatur recta Xn; dico, ab hac Xn tangi Hyperbolam in puncto X.

Nam, si ponatur, ductam esse tangentem Xn; & nominatis (ut ante) AB, a; BV, u; Bn, z; erit $an = (a-z)$; & patebit ex doctrina Sectionum Conicarum, esse $AV(a+u).aB(a) :: aB(a).an(a-z)$. Itaque erit $au = az + uz$; & $au:(a+u) = z$. Ergo quando ex constructione facta sit $Bn = au:(a+u) = z$, & ex puncto X ducta fuerit Xn, erit etiam eadem Xn tangens in puncto X. Q. E. D.

Corollarium.

50. Trianguli autem Xan area est $= VX \times na : 2$. Sed $VX = \sqrt{(2au + uu)} = a\sqrt{(2az - zz)}:(a-z)$, ob $au:(a+u) = z$; & $na:2 = (a-z):2$; ergo $VX \times na : 2$, hoc est, triangulum $Xan = a\sqrt{(2az - zz)}:2$.

Propositio VIII.

51. Curva AKO sit Tractoria, AD ejus maxima

X appli-

applicata, asymptoton DN. Sit B vertex, a centrum Hyperbolæ æquilateræ, cujus semiaxis aB. Ex quovis puncto K ducta KP parallela asymptoto Tractoriæ, & ex Hyperbolæ puncto X tangente Xn, quæ secet semiaxem in n; dico esse triangulum basi AD, altitudine PK, æquale Hyperbolico trilineo, axis portione nB, tangente Xn Hyperbolam, & curva BhX intercepta Hyperbolæ comprehenso; hoc est, esse trilineum BhXnB = (AD×PK): 2.

*Art 47. Nam (itidem positis iisdem, quæ supra) *est Sector aBhXa = (AD × YP): 2 + (AD × PK): 2; atque

*Art.38. *(AD × YP): 2 = $a\sqrt{(2az - zz)}$: 2; ex quo erit aBhXa $- a\sqrt{(2az - zz)}$: 2 = (AD × PK): 2. Sed triangulum

*Art.50. *Xan = $a\sqrt{(2az - zz)}$: 2. Ergo aBhXa — Xan, nimirum trilineum BhXnB = (AD×PK): 2. Q. E. D.

Corollarium.

*Art.41. 52. Cum sit *AD×PK = $\int adz\sqrt{(2az - zz)}:(a - z)$, liquet, elementi differentialis $adz\sqrt{(2az - zz)}:(a - z)$

*Art.44. integrale illud, quod *supra inventum fuit, potuisse una operatione inveniri. Constructa enim Hyperbola æquilatera; cujus semiaxis = a, & Bn = z (nimirum = abscissæ AP sumtæ in axe Lineæ Tangentium, sive in maxima applicata curvæ Tracto-

*Art.46. riæ) sumta abscissa *BV = $az:(a - z)$, ductaque Hyperbolæ tangente nX, prodiisset trilineum BhXnB, cujus duplum æquale integrali differentialis elementi $adz\sqrt{(2az - zz)}:(a - z)$.

Propositio VIIII.

53. Figuræ Tangentium aream exhibere per Logarithmos.

Ex Hyperbolæ vertice B, & ab lineæ aX extremo puncto X ducantur Bi, Xu ad asymptoton aQ per-

perpendiculares. Faciliter autem posset Synthetica ratione demonstrari, triangulum mixtilineum aBhXa esse æquale quadrilineo BiuXhB. Sed, quoniam calculorum rationes ingressi sumus, idem præstabimus, demonstrando, propositorum trianguli & quadrilinei elementa differentialia æqualia esse. Namque elementum differentiale quadrilinei est $Xu \times dau$ (quoniam $dau = diu$) positisque iisdem, quæ *prius, linearum nominibus; ex natura Hyperboles, & ex triangulis auX rectangulo, & aVQ, XuQ rectangulis & isoscelibus elicitur, $au = \sqrt{(nn - aa : 2 + n\sqrt{(nn - aa)})}$; cujus quantitatis differentia $= dau = (2ndn\sqrt{(nn - aa)} + 2nndn - aadn) : \sqrt{(nn - aa)} \times 2\sqrt{(nn - aa : 2 + n\sqrt{(nn - aa)})}$. Et ob naturam ipsius Hyperbolæ est $Xu = Bi^2 : au = aa : 2\sqrt{(nn - aa : 2 + n\sqrt{(nn - aa)})}$. Quare, multiplicando analyticos valores ipsarum Xu, & dau; dividendoque & numeratorem producti, & denominatorem per $2n\sqrt{(nn - aa)} + 2nn - aa$, habetur quadrilinei differentiale elementum $Xu \times dau (= Bi^2 \times dau : au) = aadn : 2\sqrt{(nn - aa)}$. Sed etiam trianguli mixtilinei aBhXa *elementum differentiale est $= aadn : 2\sqrt{(nn - aa)}$. Ergo, quoniam tam trianguli aBhXa, quam quadrilinei BiuXhB unum idemque semper est elementum differentiale; iccirco sequitur, ut illud triangulum huic quadrilineo æquale sit.

*Art. 44.

*Art. 44.

Nunc ad Qa, tamquam ad axem, & ad pΓ (nimirum ad pa productam) tamquam ad asymptoton, descripta intelligatur Logarithmica bic transiens per sui axis punctum i, existente ejus Subtangente constanti $= Bi = a : \sqrt{2}$. In ua producta sumatur $aS = Bi$; & per punctum S agatur lSΦ parallela ad pΓ; producta autem Xu secet Logarithmicam in b, & ducatur ad asymptoton Logarithmicæ applicata bΓ, quæ protracta secet lΦ in Φ.

Appli-

Applicatæ Γ b = a u Logarithmus erit a Γ; hujusque differentia = Bi × *d*au : au; quare elementum differentiale rectanguli aSΦΓ erit = Bi × Bi × *d*au : au (ut paullo supra ostensum est) = $aadn : 2\sqrt{(nn-aa)}$. Inventa igitur per Logarithmos area aSΦΓ = $\int aadn : 2\sqrt{(nn-aa)}$, sumatur a Σ = a Γ, completoque rectangulo ΣlSa, habetur totum rectangulum ΣlΦΓ = $\int aadn : \sqrt{(nn-aa)}$; &, ablato rectangulo ΣlΔd, quod sit = $aa\sqrt{(nn-aa)} : n$, remanet rectangulum illud dΔΦΓ = $\int aadn : \sqrt{(nn-aa)}$
*Art. 45. $- aa\sqrt{(nn-aa)} : n$ = * areæ trianguli Figuræ Tangentium mixtilinei AREPA. Ergo inventa est Figuræ Tangentium area per Logarithmos. Q. E. F.

Corollarium I.

54. Quoniam ex superiore Articulo liquet, rectangulum aSΦΓ esse æquale triangulo hyperbolico
*Art. 47. aBhXa; hoc autem, ut * supra jam ostendimus, est æquale (AD × YP) : 2 + (AD × PK) : 2, erit etiam aSΦΓ = (AD × YP) : 2 + (AD × PK) : 2.

Corollarium II.

55. Si data sit Tractoria AKO, cujus tangens constans = *a*, abscissa AP = *z*, quadrans conjugatus AYFD, ad cujus arcum pertingat in Y applicata (ad punctum P) KP producta. Data præterea sit Logarithmica bic, cujus axis ua, subtangens constans $a : \sqrt{2}$, asymptoton pΓ, & tam ia portio axis inter curvam & asymptoton, quam axis producti portio aS, sint = $a : \sqrt{2}$, & ad aS applicatum sit rectangulum aSΦΓ = (AD × YP) : 2 + (AD × PK) : 2 tum ex puncto Γ ducta sit ad Logarithmicam applicata Γ b; liquet, posita $aa : (a - z) = n$, inde etiam fieri Γ b = $\sqrt{(nn - aa : 2 + n\sqrt{(nn-aa)})}$.

Pro-

Propositio X.

56. Data Figuræ Tangentium area, ope ejus quodlibuerit Tractoriæ punctum invenire.

Data sit linea aliqua AD, & describenda sit inventione plurium punctorum Tractoria, cujus tangens constans datam lineam AD exæquet. Linea illa AD dicatur a; & in ea assumatur quodlibet punctum P, abscissaque AP nominetur z. Ad AD applicetur rectangulum ADTM = * $\int adz\sqrt{(2az - zz)} : (a - z)$ *Art.44. 45.&53. & æquale respondenti areæ Figuræ Tangentium. Tum ex puncto P ducatur applicata PK, secans latus TM in K; & hoc punctum K, ut jam *ante *Art.42. ostendimus, pertinebit ad Tractoriam, cujus Tangens AD. Ergo, ubi data est area Figuræ Tangentium, datum etiam est, quodlibet Tractoriæ punctum invenire. Q. E. F.

Propositio XI.

57. Data descriptione Lineæ Tractoriæ, quadraturam æquilateræ Hyperbolæ invenire.

Datus sit Sector XaGfBhX Hyperbolæ æquilateræ GBX, cujus semiaxis aB dicatur a; abscissa BV, u; quæraturque quadratura illius Sectoris ope Tractoriæ. Describatur Tractoria AKO, cujus tangens constans sit $= a$, asymptoton DN, maxima applicata ad asymptoton AD, ex qua abscindatur AP $= au : (a + u)$, hæcque dicatur z; tum describatur quadrans conjugatus AYFD, & per punctum P ducatur YK angulos rectos efficiens cum AD, terminata ab arcu quadrantis atque ab curva Tractoria in punctis Y & K; eritque (ut *supra demonstratum jam est) Sector *Art.47. hyperbolicus XaGfBhX = rectangulo ex AD in YK. Inventa autem area illius Sectoris, facili ratione areæ reliquarum Hyperbolæ partium inveniuntur. Ergo,

ope descriptionis lineæ Tractoriæ, quadratura Hyperbolæ æquilateræ inventa est. Q. E. F.

Propositio XII.

58. Data descriptione lineæ Tractoriæ, Logarithmos construere; hoc est, Lineam Logarithmicam, cujus subtangens constans data sit.

Ponatur, datam subtangentem esse $= a : \sqrt{2}$; & assumta $AD = a$, ex A tamquam vertice describatur Tractoria AKO, cujus tangens constans $= a$, & applicetur, pro lubitu, KP; tum Abscissa AP dicatur z; construaturque quadrans conjugatus AYFD, & producatur applicata KP, ut secet quadrantis arcum in Y. Ducantur duæ lineæ indefinitæ uS, pΓ, se se decussantes in a ad angulos rectos, quarum prior sit axis describendæ Logarithmicæ, altera sit asymptoton. Abscindantur $aS = a : \sqrt{2}$, & $ai = aS$; punctumque i erit, ut ex *superius expositis satis manifestum est, in Logarithmica quæsita. Ad aS applicetur rectangulum $aS\Phi\Gamma = (AD \times YP) : 2 + (AD \times PK) : 2$; & ex puncto Γ ducatur indefinita Γy parallela ad uS. Demum, facta $n = aa : (a - z)$, ex Γy abscindatur $\Gamma b = \sqrt{(nn - aa : 2 + n\sqrt{(nn - aa)})}$, quod triangulorum rectangulorum ope facile perficitur; punctumque b, ut liquet ex *ante demonstratis, pertinebit ad Logarithmicam, cujus subtangens constans = datæ lineæ $a : \sqrt{2}$. Hoc eodem modo quotvis Logarithmicæ punctis inventis, ope descriptionis lineæ Tractoriæ, construetur linea Logarithmica, cujus subtangens constans data fuerit. Q. E. F.

*Art. 53. & 55.

*Art. 55.

Propositio XIII.

59. Datis duabus rectis (*Fig.* 19.) AD, AH, in A ad rectum angulum conjunctis, atque centro D, inter-

intervallo DP, descripto circuli arcu PQ; invenire in recta AH punctum B tale; ut, ducta DB secante arcum PQ in c, sit Bc = BA.

Producatur AD in X, & fiat DX = PD; ex puncto P ducatur Pg parallela ad AH, & æqualis PA; per puncta X, g ducatur recta XgB secans AH in B; dico, B esse punctum quæsitum; hoc est, ducta BD, esse Bc = BA. Linea AD appelletur a; DP = Dc = DX, y; BA, x; Bc, n; erit PA = Pg = $a-y$; XA = $a+y$; XP = $2y$; BD = $n+y$. Iam vero ob similia triangula XPg, XAB, habebitur analogia hæc; XP$(2y)$. XA$(a+y)$ :: Pg$(a-y)$. BA$(x) = (aa-yy) : 2y$. Et quoniam triangulum DAB rectangulum est, erit BA$^2((a^4-2aayy+y^4) : 4yy)$ + AD$^2(aa)$ = BD$^2(nn+2yn+yy)$; qua ex æquatione elicitur $n = (aa-yy) : 2y$; est igitur $n = x$; nimirum inventa est Bc = BA. Q. E. F.

Corollarium I.

60. Quoniam $n = (aa-yy) : 2y$, & DB = $n+y$; erit DB = $(aa+yy) : 2y$.

Corollarium II.

61. Si centro D, intervallo DA, describatur circuli arcus AF, secans BD in Y, & ex puncto Y ducatur YL normalis ad AD, erit DL = $2aay : (aa+yy)$. Namque est DB*$((aa+yy) : 2y)$. DY(a) :: DA(a). DL = $2aay : (aa+yy)$; *Art. 60. cujus quantitatis si differentia quæratur, invenietur esse $(2a^4dy - 2aayydy) : (aa+yy)^2$.

Corollarium III.

62. Erit etiam YL = $(a^3-ayy) : (aa+yy)$. Est enim DB$((aa+yy) : 2y)$. DY(a) :: BA *$((aa-yy) : 2y)$. YL; *Art. 59. ergo YL = $(a^3-ayy) : (aa+yy)$. Et hujus quantitatis differentia invenitur esse $-4a^3ydy : (aa+yy)^2$.

Pro-

Propositio XIIII.

63. Si data sit Tractoria (*Fig.* 20.) AKO, cujus quadrans conjugatus AYFD, & ducta sit YX parallela ad asymptoton FN, terminata in punctis Y, X ab arcu quadrantis, & a curva Tractoria; ducatur autem a puncto Y ad quadrantis centrum D recta YD, & ad FN perpendicularis YE; tum ex puncto X ducatur Xe applicata ad asymptoton, & tangens XN. Dico, triangula YED, XeN esse similia, & æqualia; ac lineam (sive quadrantis radium) YD esse parallelam ad XN.

Namque erunt YE = Xe; YD = AD = XN; anguli ad E, & ad e recti; ergo triangulum YED erit simile, & æquale triangulo XeN. Ideoque angulus YDE æqualis angulo XNe; &, quod consequitur, YD parallela ad XN. Q. E. D.

Propositio XV.

64. Data Tractoria AKO, & in ea puncto K, invenire rectam YX æqualem arcui AK Tractoriæ; hoc est, rectificare arcum AK.

Describatur quadrans conjugatus AYFD, & ex vertice A ducatur AH perpendicularis ad AD. Ex puncto K agatur KP normalis ad AD, & centro D, intervallo DP, describatur circuli arcus PQ. *Inveniatur in AH punctum B tale, ut ducta DB, secante arcum PQ in c, sit pars Bc = BA. Ex puncto Y, in quo DB secat arcum quadrantis conjugati, ducatur asymptoto Tractoriæ parallela YX (secans AD in L) pertingens usque ad Tractoriam in X, & erit YX æqualis dato arcui AK Tractoriæ.

*Art.59.

Ad asymptoton DN applicetur KT, ducaturque sp infinite proxima ad KP. Intelligantur etiam ductæ (ut *prius) YE, Xe, & tangens XN; tum vero sit

*Art.63.

ſit L l differentia lineæ D L, ac per l agatur i x parallela ad Y X, & ex punctis i, x demittantur lineolæ i r, x q. Atque, ut *ante factum eſt, PD = KT dicatur y; A D, a. Iam Y r differentia lineæ Y L, una cum q X differentia lineæ L X, nobis dabit differentiam totius lineæ Y X. Porro differentiam lineæ Y L *ſupra invenimus eſſe $= -4a^3ydy:(aa+yy)^2$; quantitas vero hæc, cui etiam æqualis invenitur, adhibitis ſimilibus triangulis Yir, YDL, & æquatione ad circulum, cujus radius $= a$, abſciſſa vero D L $= 2aay:(aa+yy)$; quantitas, inquam, hæc $-4a^3ydy:(aa+yy)^2$ oſtendit, differentiam Y r eſſe negativam; &, ſi numerator, ac denominator multiplicentur per y, fiet $-$Yr $= -4a^3yydy:y\times(aa+yy)^2$. Differentia autem q X ratione hac invenitur; triangulum xqX eſt ſimile triangulo XeN, & hoc triangulo YED; ergo triangula xqX, YED ſunt ſimilia; ergo, ut ſe habet YE, ſeu * DL, nimirum $2aay:(aa+yy)$ ad ED, ſeu * YL, nimirum $(a^3-ayy):(aa+yy)$ ita etiam eſt xq, ſeu Ll, nimirum ipſius lineæ DL * differentia $(2a^4dy-2aayydy):(aa+yy)^2$ ad q X; hinc igitur eſt q X $=(a^5dy-2a^3yydy+ay^4dy):y\times(aa+yy)^2$. Quoniam vero addidimus differentiam L l ad eam partem, ut ſit + L l, habebimus etiam + x q; ſed x q eſt differentia applicatæ ad aſymptoton, q X eſt differentia abſciſſæ, & in hoc caſu harum differentiarum ſigna contraria eſſe debent, ut * jam oſtenſum eſt, ergo quantitas q X negativa eſſe debet; igitur erit $-$q X $=(-a^5dy+2a^3yydy-ay^4dy):y\times(aa+yy)^2$. Et, jungendo $-$Yr, & $-$qX, fiet totius YX differentia $=$ $(-a^5dy+2a^3yydy-ay^4dy):y\times(aa+yy)^2 \; -4a^3yydy:y\times(aa+yy)^2$ $=(-a^5dy-2a^3yydy-ay^4dy):y\times(aa+yy)^2$ nempe $=$ $((a^4+2aayy+y^4):(a^4+2aayy+y^4))\times -ady:y$; hoc eſt $=1\times -ady:y$ nimirum $= -ady:y$.

*Art. 59. &c.

*Art. 62.

*Art. 61.

*Art. 62.

*Art. 61.

*Art. 32.

*Art.33. Sed est etiam dati arcus AK differentia *Ks = ds = $ady:y$; & quoniam in superiore calculo habemus
*Art.33. + Ll, ac (quod consequitur) + dy; *differentia Ks afficienda est signo —. Igitur Ks = $-ady:y$. Igitur, cum dati arcus AK idem sit semper elementum differentiale, quod est lineæ YX; sequitur, ut linea hæc sit æqualis illi arcui; atque ut sit rectificatus arcus idem AK. Q. E. F.

Corollarium.

65. Liquet autem ex superiore calculo, esse lineam YX = $\int -ady:y$.

Propositio XVI.

66. Positis iisdem, quæ in superiore Propositione; fiat lineæ (*Fig.* 18.) AD quadratum ADFH; intelligaturque ex vertice A descripta Hyperbola æquilatera AV, cujus una ex asymptotis FDN eadem sit, ac Tractoriæ AKO asymptoton DN protracta ad partes F, & quadratum ejus Hyperbolæ ad angulum asymptoton sit illud idem ADFH; productaque PK, quæ secet Hyperbolam in V, ex V demittatur VE applicata ad asymptoton. Dico, rectam YX facere cum AD rectangulum æquale spatio Hyperbolico ADEV, terminato lineis AD, EV perpendicularibus ad FDN, & quæ sunt inter se in ratione AD ad DP.

Nam, ut prius, appellatis AD, a; KT = VE, y; ob naturam Hyperbolæ æquilateræ, erit spatii Hyperbolici ADEV elementum differentiale = $-aady:y$.
*Art.64. Cumque lineæ YX differentia sit * = $-ady:y$, erit etiam rectanguli facti ex YX in AD elementum differentiale = $-aady:y$. Igitur, cum illius spatii Hyperbolici, & hujus rectanguli differentiale elementum

idem

idem ubique sit, sequitur ut recta YX faciat cum AD rectangulum æquale spatio Hyperbolico ADEV, terminato lineis AD, EV perpendicularibus ad FDN. Quæ lineæ AD, EV sunt in ratione AD ad DP; quandoquidem semper est EV=DP. Q.E.D.

Corollarium.

67. Hinc iterum possumus, data descriptione Lineæ Tractoriæ, quadraturam æquilateræ Hyperbolæ invenire. Nam, si data sit Hyperbola æquilatera AV, cujus asymptoton FN, & quadratum ad angulum asymptoton ADFH, ac quævis applicata EV; quæraturque area spatii ADEVA; ex vertice A describatur Tractoria AKO, cujus maxima applicata AD, asymptoton DN (pars ipsius FN) & ex puncto V ducatur VP ad asymptoton parallela, quæ Tractoriam secet in K; tum *arcui AK fiat æqualis recta YX; eritque *rectangulum factum ex YX in AD æquale areæ Hyperbolici spatii ADEVA; quod quærebatur. *Art.64. *Art.66.

Propositio XVII.

68. Invenire puncta Curvæ Tractoriæ, posita quadratura Hyperbolæ æquilateræ.

Sit DN asymptoton, & AD tangens constans, sive maxima applicata describendæ Tractoriæ. Ex A, ceu vertice, describatur Hyperbola æquilatera AV, cujus quadratum sit ADFH; nimirum quadratum lineæ AD. Ducatur quælibet applicata EV, & ex puncto V agatur VP parallela ad asymptoton, secans AD in puncto P. Descripto circuli arcu PQ, *ita ducatur DB, ut sit BA=BQ; centroque D, intervallo (ut *alias factum fuit) DA, describatur circuli arcus AY, atque ex intersectionis puncto Y *Art.59. *Art.61.

ducatur linea YM indefinita, ad rectos angulos secans AD. Tum ex AD & alia linea Φ fiat rectangulum æquale spatio Hyperbolico ADEVA (quod spatium habetur posita Hyperbolæ quadratura) ac demum ex linea illa YM indefinita auferatur YX æqualis lineæ Φ; & punctum X ad Tractoriam pertinebit.

*Art.66. Nam ea Tractoriæ proprietas est, ut *posita illa, quam dedimus, constructione, linea AD cum linea YX, cujus extremum punctum X in Tractoria est, comprehendat rectangulum æquale areæ Hyperbolicæ ADEVA. Ergo, cum huic areæ æquale factum sit rectangulum ex AD in YX, inventum punctum X pertinebit ad Tractoriam; eodemque modo plura alia puncta possunt inveniri. Q. E. F.

Propositio XVIII.

69. Data sit Tractoria (*Fig.22.*) AKO, cujus Maxima Applicata AD; & per punctum A transeat Logarithmica AEVM, cujus Subtangens constans = eidem AD. Sit utriusque curvæ asymptoton FN, & agatur huic parallela quæcumque EK; atque ex punctis E, & K ducantur applicatæ EL, KT; sive quovis alio modo ponantur duæ applicatæ æquales EL, KT; illa ad Logarithmicam, hæc ad Tractoriam. Dico, abscissam DL sumtam in Logarithmicæ asymptoto esse æqualem arcui AK Tractoriæ.

Ducatur es infinite proxima ad EK, & ex punctis e, atque s demittantur applicatæ el, st. Tum AD dicatur a; DL, u; arcus AK, s; EL=KT, y; eruntque Ll=du; sK=ds; en=sm=dy. Ob Logarithmicæ naturam erit $-du=ady:y$; &, ob natu-
*Art.33. ram Tractoriæ, erit $-$*$ds=ady:y$ (idque in omnibus Curvarum punctis, ubi applicatæ ad utramque Curvam æquales existant) ergo erit $du=ds$; & DL

illius

illius *du* Integrale = arcui AK Integrali hujus *ds*. Ergo abſciſſa DL, ſumta in Logarithmicæ aſymptoto, eſt æqualis arcui AK Tractoriæ. Q. E. D.

Corollarium I.

70. Si in Logarithmicæ aſymptoto DF ſumantur tres partes æquales DL, LZ, ZF, ducanturque applicatæ LE, ZV, FM; atque ex punctis E, V, M agantur EK, VO, MR parallelæ ad aſymptoton; ac demum ex punctis K, O, R, in quibus illæ parallelæ Tractoriam ſecant, ducantur applicatæ KT, OQ, RN; manifeſtum eſt, ex Logarithmicæ proprietate, tres lineas LE, ZV, FM futuras eſſe in geometrica proportione; itidemque in geometrica proportione tres KT, OQ, RN, quippe quæ prioribus illis ſunt æquales. Præterea vero *liquet, tres Tractoriæ arcus AK, KO, OR futuros eſſe æquales. *Art. 69.

Corollarium II.

71. Igitur quotieſcumque applicatæ RN, OQ, KT ad Tractoriæ aſymptoton, in ratione geometrica ſint; Tractoriæ arcus RO, OK, ab illis intercepti, ſunt æquales.

Corollarium III.

72. Ex eadem Propoſitione illud etiam plane liquet; lineam YX (ubi *facta ſit YX = arcui AK) eſſe Logarithmum rationis, quam habet AD ad DP, ſive AD ad EL; ideſt, æqualem eſſe diſtantiæ linearum AD, EL, vel aliarum duarum quarumcumque, quæ eandem habent rationem ordinatarum perpendicularium ad aſymptoton lineæ Logarithmicæ, quæ habet AD pro Subtangente univerſali. Eſt etenim YX = arcui AK, & arcus AK = *Art. 64.

abſcis-

abſciſſæ DL; quæ DL eſt æqualis diſtantiæ linearum AD, EL (idem autem eſt, ſive dicamus AD, EL, ſive AD, DP; nam EL=DP) ordinatarum perpendicularium ad aſymptoton FN Logarithmicæ AEVM habentis lineam AD pro univerſali Subtangente. Notum autem eſt ex Logarithmicæ proprietatibus, inter duas quaſcumque lineas illius ejuſdem rationis, diſtantiam æqualem diſtantiæ DL intereſſe oportere.

Corollarium IIII.

73. Vnde poſſunt inveniri Logarithmi Tabularum. Nam, poſita AD = 1.; lineæ KT, OQ (ſive EL, VZ) &c. repræſentant fractos numeros. Arcus AK, AO (ſive lineæ DL, DZ) &c. repræſentant Logarithmos negativos; quibus habitis, affirmativi quoque linearum aliarum Logarithmi haberi queunt.

Corollarium V.

74. Eſt autem DL (ob naturam Logarithmicæ) = $\int ady : y$; & DT (ob naturam Tractoriæ) = $\int dy\sqrt{(aa-yy)} : y$. Nunc ſi differentia $dy\sqrt{(aa-yy)} : y$ convertatur in ſeriem, atque hæc deinde integretur, habebitur DT = $\int dy\sqrt{(aa-yy)} : y = \int ady : y - yy : 4a - y^4 : 32a^3 - y^6 : 96a^5$ &c. Quare, ſi ex DL auferatur La = DT, erit reliqua aD = infinitæ ſeriei $yy : 4a + y^4 : 32a^3 + y^6 : 96a^5$ &c.

Propoſitio XVIIII.

75. Si in Maxima Tractoriæ AKO Applicata AD ſumantur tot, quot volueris, proportionales; incipiendo a puncto D, ut DS, DI, DP, & ducas applicatas (ad maximam applicatam, hoc eſt, parallelas ad aſymptoton) SR, IO, PK; interceptæ partes Curvæ, ut RO, OK, omnes erunt æquales.

Du-

Ductis enim ad Tractoriæ asymptoton tribus applicatis RN, OQ, KT, erunt hæ æquales tribus illis DS, DI, DP; nimirum in geometrica erunt proportione; atque *ideo intercipient arcus RO, OK æquales. Q. E. D. *Art. 71.

Propositio XX.

76. Spatium infinitum inter curvam Tractoriam (*Fig.* 16.) AKO, asymptoton DN, & rectam AD, est æquale quartæ parti circuli, cujus radius est AD; nimirum est æquale Quadranti Conjugato AYFD.

Maxima Applicata AD dicatur a; MK applicata ad axem secundum dicatur z; quare habebitur KT applicata ad asymptoton $=a-z$; intercepta autem AM = DT dicatur x. Ex puncto K ducatur KY parallela ad asymptoton, abscindens AP = MK = z; & erit PY applicata ad circuli quadrantem, quæ dicatur u. Ductis autem sI, st infinite proximis ad KY, & KT, prodibunt KTts $=adx-zdx$ elemento differentiali Tractoriæ spatii KADT; & PYIp $=udz$ elemento differentiali spatii PYA, hoc est portionis quadrantis conjugati.

Quoniam vero, *ob naturam Tractoriæ, est $adx-zdx=dz\sqrt{(2az-zz)}$; &, ob naturam circuli, $u=\sqrt{(2az-zz)}$; habebitur elementum differentiale KTts $=adx-zdx=dz\sqrt{(2az-zz)}$, & elementum differentiale PYIp $=udz=dz\sqrt{(2az-zz)}$. Ergo erit elementum KTts = elemento PYIp. Id autem cum verum semper sit de omnibus hujusmodi differentialibus elementis; concludendum hinc est, etiam horum integralia æqualia esse; atque spatium illud infinitum inter curvam Tractoriam AKO, asymptoton DN, & rectam AD, esse equale Quadranti Conjugato AYFD. Q. E. D. *Art. 29.

Pro-

Propositio XXI.

77. Solidum infinitum, quod producitur a spatio illo infinito (intercepto inter Tractoriam, asymptoton, & rectam AD) rotando circa asymptoton, est æquale quartæ parti sphæræ, cujus radius AD.

Notum est (positis AD $= a$, & circuli, cujus radius a, circumferentia $= c$) esse illius sphæræ soliditatem $= 2caa:3 = 4caa:6$. Modo ordinata KT nominetur y; & fiat analogia hæc; $a.c::y.cy:a =$ circumferentiæ circuli, cujus radius y; ductaque $cy:a$ in $y:2$, habebitur $cyy:2a =$ circulo, cujus radius y; & ducto valore hujus circuli in differentiam
*Art.31. Tt *$dy\sqrt{(aa-yy)}:y$, fit $cydy\sqrt{(aa-yy)}:2a =$ cylindrulo differentiali propositi solidi. Tum integrando hanc differentialem quantitatem habetur $c\times(aa-yy)^{\frac{3}{2}}:6a$. Sed quando solidum est infinitum (ut nunc proponitur) y poni potest æqualis nihilo, atque ita integrale est $c\times(aa)^{\frac{3}{2}}:6a = caa:6$. Ergo hoc solidum est ad illam sphæram ut $caa:6$ ad $4caa:6$. Ergo hoc solidum est quarta pars illius sphæræ. Q. E. D.

Propositio XXII.

78. Superficies solidi infiniti (de quo in superiore Propositione) sine basi, est æqualis circulo, cujus radius est DH, diagonalis quadrati ex AD.

*Art.77. Dicantur, ut *ante, AD, a; & circuli, cujus radius a, circumferentia, c; & KT, y. Fiat $a.c::y.cy:a =$ circumferentiæ circuli, cujus radius y. Hæc circumferen-
*Art.33. tia ducatur in *Ks $= ady:y$, & habebitur $(cy:a)\times(ady:y) = cdy =$ differentiali elemento superficiei, sine basi, propositi solidi. Atque integrando differentiam cdy, fit $cy =$ ipsi superficiei. Quoniam vero, ubi agitur de solidi totius superficie, poni potest $y = a$,

erit

erit eadem ſuperficies $= ca$. At radii AD circulus eſt $= ca : 2$; ergo circulus, cujus radius $=$ DH, duplus prioris illius circuli, erit $= ca$. Ergo ſuperficies propoſiti ſolidi, ſine baſi, eſt æqualis circulo, cujus radius eſt DH, diagonalis quadrati ex AD. Q. E. D.

Propoſitio XXIII.

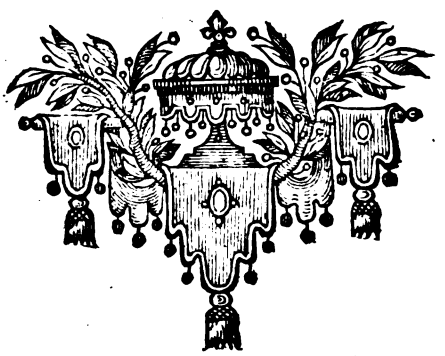
79. Iiſdem poſitis, quæ in Propoſitione XV. fuere conſtituta; detur (*Fig.* 21.) Curva Catenaria GA, cujus axis DC, & vertex A. Si ſit BY $=$ AC, quæ ſumitur in axe Catenariæ; ideſt DB $=$ DC; erit applicata ejus CG $=$ YX.

Intelligatur, deſcriptæ curvæ Catenariæ axis CD partem conſtantem infra verticem (hoc eſt Parametrum) eſſe AD $= a$; ejuſque curvæ unam applicatam eſſe CG; & per punctum D ductam eſſe lineam FDN, angulos rectos cum AD efficientem. Tum per punctum A deſcribatur Logarithmica HAq, cujus ſubtangens conſtans $= a$; aſymptoton FDN. Deinde ex Catenariæ puncto G demittatur ad FDN perpendicularis GL (cujus pars LE erit applicata ad Logarithmicam) atque, ſumta Dr $=$ DL, ex puncto r ducatur rH applicata alia ad Logarithmicam; eritque GL æqualis dimidiæ ſummæ duarum applicatarum LE, rH, ſimul ſumtarum; ut liquere poteſt ex Catenariæ conſtructione, quam dedit Leibnitzius in „Actis Eruditorum„ An. 1691. pag. 278.; & ex pluribus demonſtrationibus proprietatum Catenariæ, quas Viri doctiſſimi jam tradidere. Quamobrem ſi LE dicatur y, erit (ob tres LE, DA, rH, continue, ex Logarithmicæ natura, proportionales) GL, ſeu DC $= (aa + yy) : 2y$; & (ob naturam itidem Logarithmicæ) DL, ſeu CG $= \int -ady : y$.

Modo ſi ex vertice A deſcripta ſit Tractoria AKO,

cujus maxima applicata eadem $AD = a$; ductaque
*Art.64. sit alia applicata $TK = LE = y$; & *inventa sit $YX =$
*Art.60. arcui AK. Erit *$DB = (aa + yy) : 2y$; sed etiam $DC = (aa + yy) : 2y$; ergo erit $DB = DC$. Quoniam vero (ob applicatas æquales LE, TK; illa ad Logarithmicam, hæc autem ad Tractoriam) *est abscis-
*Art.69.
*Art.65. sa $DL =$ arcui $AK =$ *$YX = \int -ady : y$; atque etiam est applicata $CG = \int -ady : y$; iccirco erit $CG = YX$. Ergo, quando $DB = DC$, erit Catenariæ applicata $CG = YX$. Q. E. D.

FINIS.



VIRO CELEBERRIMO
IACOBO HERMANNO

Ioannes Polenus S. P. D.

CVm superiorem Epistolam, atque Commentariolum typis describi curassem, neque copia mihi fieret certorum hominum, quibus exemplum eorum aliquod ad Te perferendum darem; interea venit in mentem, hæc quoque alia, quæ sequuntur, ad Te mittere. Scilicet cum me non lateat inter cetera, in quibus Illustrium Celeberrimorumque istorum Sodalium desudat industria, atque eximia doctrina, illud esse, ut Regionum istius Russici Imperii Geographiæ incrementum afferant perfectionemque: iccirco Observationes subijcio nonnullorum Defectuum Solis, & Lunæ, quibus itidem Longitudinis Regionis istius, in qua nunc habitas, Ornatissime Hermanne, cum hujusce nostræ Longitudine fieri possit aliqua comparatio. Vale.

Patavii. Kal. Septem. CIↃIↃCCXXVIIII.

OBSERVATIO Defectus Solis, habita Patavii VII. Kal. Octob. 1726.

Temp.	*Appar.*	
H. ′	″	
5. 25.	25.	Initium Defectus hoc tempore nullum apparebat: tum post tempus hoc ingruerunt densæ nubes.

Temp. Appar. H. ′	″	
		Dig. Obſcur.
5. 29.	5.	1.
5. 31.	58.	Tegitur maxima earum, quæ conſpiciebantur in Sole, Macula, intermedia inter minores duas alias.
		Dig. Obſcur.
5. 34.	27.	2.
5. 40.	43.	3.
5. 44.	20.	$3\frac{1}{2}$.
5. 47.	15.	4.
5. 48.	12.	$4\frac{1}{4}$.
5. 49.		Creſcebat certe adhuc Obumbratio in Solari Diſco, ut trans nubes apparebat: mox vero cum denſiores fierent nubes, atque Sol ad Finitorem properaret, nihilquicquam amplius licuit obſervare.

OBSERVATIO Defectus Lunæ, habita (tubo optico optimæ notæ, longo pedes pariſienſes ſeptem) Patavii. VI. Id. Octob. 1726.

Temp. Appar. H. ′	″	
16. 16.	44.	Penumbra diluta.
16. 18.	54.	Penumbra denſior.
16. 21.	19.	Vmbra ad Lunæ limbum.
16. 31.	35.	Attingit Mare Humorum.
16. 35.	47.	Attingit Grimaldum.
16. 38.	34.	Diſtat a Tychone diametro Tychonis ipſius, & Grimaldum tegit tertia ejuſdem Grimaldi parte.

Temp.

Temp. H.	*Appar.* ′	″	
16.	50.	40.	Fere attingit Pitatum.
17.	3.	41.	Lansbergium tegit.
17.	7.	45.	Attingit Reinoldum.
17.	15.	56.	Attingit Fracaſtorium, & Galileum.
17.	25.	53.	Attingit Mare Fœcunditatis.
17.	39.	6.	Vmbra proxima eſt ad Reinoldum, tegitque partem tertiam Maris Fœcunditatis.
17.	46.		Grimaldus emergit.
17.	54.	53.	Grimaldus jam diſtabat ab umbra diametro majore ſui integra.
18.	5.	44.	Gaſſendus totus modo extra umbram, Mare Fœcunditatis dimidia circiter parte detectum, inter dehiſcentes nubes videbantur.
			Quæ nubes ad Finitorem deinde coactæ occiduam Cæli partem penitus obumbravere; neque Luna poſterius apparuit.

OBSERVATIO paucarum, quæ ferme omnes trans nubes tenues conſpectæ ſunt, Phaſium Defectus Lunæ, habita (tubo optico optimæ notæ, longo pedes pariſienſes ſeptem) Patavii. Idibus Febru. 1729.

Temp. H.	*Appar.* ′	″	
			Obſervationem Initii Defectus nubes denſæ impedivere.
7.	44.	40.	Vmbra attingit Grimaldum.
7.	45.	40.	Grimaldum tegit totum.

Temp. H.	Appar.	
7. 50.	53.	Attingit Mare Humorum.
7. 53.	26.	Tegit Maris Humorum dimidiam partem.
8. 19.	34.	Tegit Menelaum.
8. 38.	10.	Cooperit totum Mare Crisium.
9. 26.		Per dehiscentes nubes Luna admodum rubicunda observari poterat perspicue adeo, ut non meminerim, alias in totali immersione tam clare Lunam apparuisse; quod ita fortasse visum est ob atram obscuritatem, quam circumpositæ densæ nubes efficiebant.
10. 15.	6.	Vmbra dilui incipit e regione proximæ emersionis.
10. 26.	45.	Grimaldus, jam emersus, ab umbra distat tota fere sua transversa diametro.
10. 31.	40.	Dimidium Mare Humorum discoopertum.
10. 38.	45.	Tycho totus emergit.
10. 50.	12.	Apparet Erathostenes.
11. 13.	27.	Promontorium Somnii totum discoopertum.
11. 19.	45.	Luna infici videtur sola penumbra.
11. 20.	56.	Finis etiam penumbræ.

OBSERVATIO Defectus Lunæ habita (tubo optico, longo pedes parisienses sex) Patavii. VI. Idus Augus. 1729.

Temp.

Temp. Appar. H. ′ ″	
11. 59. 30.	Penumbra ſatis craſſa.
12. 0. 28.	Initium umbræ ad Lunæ limbum.
12. 13. 55.	Vmbra tangit Copernicum.
12. 15. 49.	Hunc totum tegit.
12. 22. 24.	Attingit Tychonem.
12. 24. 14.	Totum Tychonem cooperit.
12. 28. 40.	Attingit Manilium.
12. 30. 15.	Hunc totum cooperit.
12. 33. 2.	Menelaum tangit.
12. 34. 22.	Menelaum omnino cooperit.
12. 49. 10.	Attingit Mare Criſium.
12. 54. 56.	Mare Criſium totum cooperit.
12. 58. 48.	Totalis Immerſio.
14. 37. 38.	Lux in Lunæ margine.
14. 41. 20.	Grimaldus extra umbram.
15. 4. 15.	Mare Serenitatis emergere cœpit.
15. 6. 16.	Tycho totus emergit.
15. 7. 28.	Manilius totus diſcoopertus.
15. 10. 30.	Menelaus extra umbram.
15. 13. 58.	Mare Serenitatis totum emerſit.
15. 21. 48.	Promontorium Somnii jam extra umbram.
15. 23. 10.	Mare Criſium incipit emergere.
15. 25. 28.	Totum Mare Nectaris extra umbram, & dimidium Mare Criſium.
15. 29. 0.	Mare Criſium integrum apparet.
15. 33. 20.	Langrenius extra umbram.
15. 38. 8.	Finis emerſionis ab omni etiam penumbra.

F I N I S.

S E-

SERIES TABVLARVM.

In Epiſtolis ad P. Abbatem Grandum.

Ponatur

Tabula Y *e regione paginæ* Nuperrimum Lunæ Defefectum

Z Conſtitueram jamdudum animo

In Epiſtola ad Abbatem A. Co: de Comitibus.

Ponatur

Tabula AA *e regione paginæ* Si qua eſt de rebus

In Epiſtola prima ad Iacobum Hermannum.

Ponatur

Tabula BB *e regione paginæ* Cum in ſermone,

CC iterumque propoſuerat,

DD ſpectat, id perfacile

EE proprie referri.

FF angulos. Tractoriæ

GG quidem, ſed

PATAVII EX TYPOGRAPHIA
SEMINARII.

IOANNIS POLENI

A D

GABRIELEM MANFREDIVM

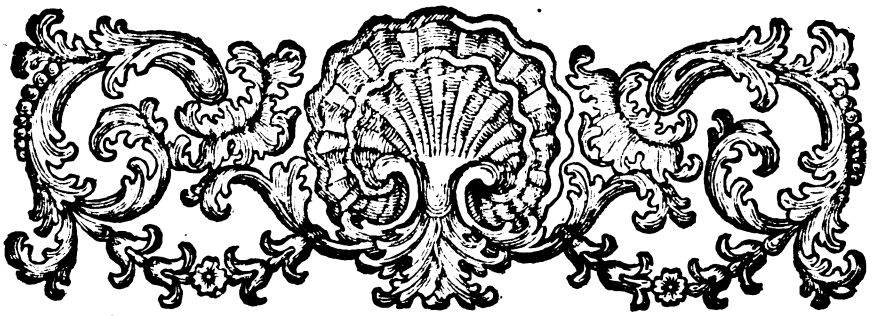
Amplissimo Bononiensi Senatui

A Secretis,

Itemque Bononiensi in Gymnasio Doctrinæ Analyticæ Professorem eximium

EPISTOLA.

In qua agitur de Veneris inter Solem & Tellurem transitu.
Anno CIↃIↃCCLXI.



VIRO CELEBERRIMO

GABRIELI MANFREDIO

Ioannes Polenus S. P. D.

Vodequadragesimus annus est ex quo meam ad Te, Doctissime Manfredi, Epistolam edidi de Mercurio in Sole viso. Nunc ut alteram hanc ederem, nolui occasionem amittere, illi similem quidem, sed tanto rariorem, quanto rariùs accidit, ut Veneris planeta inter Solem & Tellurem transeat, quàm Mercurii. Quae raritas, & quae inde in varias Scientias manare potest utilitas, etsi notum mihi erat multos permovisse ad idem phaenomenum observandum Praestantes Viros, tum Instrumentis ad id peridoneis instructissimos, tum in Observationibus Astronomicis exercitatissimos, non tamen prorsus inutile fore, duxi, si aliquid & ipse conarer, non tam perficiendi spe, in ea praesertim adversa nubilosi ut plurimum caeli constitutione, quàm experiendi voluntate. Igitur quae fieri, & videri potuerunt, accipe.

2. Dies aliquot ante Transitus futuri tempus, ea instruxi instrumenta, quae Observationi peragendae necessaria esse existimavi. Statueram verò uti (in obscuro loco) instrumento, quod Heliometro Heveliano ferè simile est; duntaxat enim differt in artificio machinae, cujus ope in tabella excipiendis Solis speciebus destinata motus ad perpendiculum, motusque paralleli ad finitorem induntur. Hujusmodi machina ut mihi construeretur olim curaveram, eandemque in dirigendis Opticis tubis pluries adhibueram. Tubis autem Opticis melioris notae non careo. Horologium Oscillatorium item melioris notae, cujus justam aequabilitatem ex Meridiana non brevi linea, in meis aedibus designata, explorare soleo, erat in promptu.

3. Iam Cl. P. Maximiliani Hell, e S. J. Viri astronomica doctrina, & observandi peritia acutissimi, Syntagma videram, cui titulus est: *Transitus Veneris per discum Solis*. Dissertationem verò, quam is commemorat, *Cel. Academiae Regiae Parisinae Astron. D. de la Lande*, & *per quàm utilem* dicit (ut quidem excellentia praestantis illius Viri Opera sunt) lubenter vidissem; sed eam nondum habui. In eo Patris Hell Syntagmate multa scitu digna cum sint, tum illud ad rem meam magis pertinet, quod methodo observandi ope Heliometri Heveliani alias methodos, quas enumerat, ac profert, antecellere statuit. Sed a mea veteri consuetudine non recessi: diligenter tamen attendi ea quatuor, quae Ille rectè utiliterque animadvertit esse curanda: & interdum eas res porrò attendendas esse, mihi quoque experientia indicaverat.

4. Quamobrem curavi, primùm ut haberem in charta imponenda tabellae delineatum circuli ambi-

tum

tum prorsus aequalem ambitui Solaris imaginis; deinde ut, tempore Observationis, delineatus ille ambitus constanter cum ambitu imaginis congruere posset; postea ut centrum Veneris in quacumque positione faciliùs posset designari, & ad hunc finem parata erat tenuis ligula, divisa bifariam in sua extremitate tam lata, quàm esse posse latam speciei Veneris diametrum, conceptum fuerat, sicque applicata ad eandem Veneris speciem centrum hujus ab ea divisione indicaretur; demum ut umbra perpendiculi per centrum Solaris imaginis, usu requirente, pertransiret.

5. In conficienda Observatione socios habui, divisis officiis, Dominum Io: Albertum Columbum, in hoc Gymnasio Astronomiae, Geographiae, & Meteororum Professorem doctissimum clarissimumque, & Doctorem Io: Antonium a Bella solertissimum in administratione Experimentalis Philosophiae Collegam meum, & Ab: Franciscum dilectissimum meum Filium. Aderant etiam nonnulli docti amici, Ab: Antonius Rocchius, Doctor Iacobus Durerius, Doctoresque Iosephus, & Antonius a Libera.

6. Ante ortum Solis diei Civilis, qui fuit VIII. Id. huiusce Iunii, Hora Astronomica 16. diei 5. parati eramus ad observandum, praestolantes Solis imaginem. Post breve tempus, horologium quidem nos admonuit, Solem oriri; sed id duntaxat ex horologio datum erat noscere. Paucis dicam: ab ortu Solis, usque ad finem Horae Astronomicae 20. 8′ Caelum adeo densis nubibus fuit obductum, ut prorsus nulla ejus species apparuerit.

7. Tunc autem nubes contra Solem positae sese attenuare, & quodammodo dispescere coeperunt. Ita paullatim facta est quaedam nubium scissura, per

quam

quam Solis apparuit imago, languida tamen, neque satis nitida. Viso tandiu desiderato Veneris in disco Solis spectaculo, festinavimus, ut (quo melius fieri posset) quidpiam colligeremus. Vnam Observationem, elapsa hora vigesima, habitam dabimus primam: post eam verò confestim aër coepit in caecas nubes iterum concrescere.

8. Sed iterum quoque, antequam horae quadrans converteretur, sese nubibus aliquantulum diducentibus, Solis radii in obscurum cubiculum penetrarunt; non tamen conferti, tuncque aliam habuimus Observationem, item festinanter; cum actutum inciperent nubes coire atque densari. At paullo post, non tamen absimili forte exigui temporis ad observandum, nova facta est nubium scissura, per quam (ex intervallo) duas alias arripuimus Observationes. Sed inde Caelum sic nubes constantes undique obduxere, ut magis optatae Observationis Egressus nulla spes affulserit. Cunctas autem, quas habuimus, Observationes subjicio.

Observationes	*Tempus Apparens.* H.	*'.*	*''*	*Distantia centri Veneris a limbo Occidentali Solis in partibus centesimis Diametri Solaris.*
1.	8.	16.	5.	8.
2.		26.	22.	6.
3.		31.	25.	5.
4.		41.	13.	3.

9. Haec sunt quae obstante adversa tempestate habere quomodocumque potuimus. Haec sunt quaedo, reputans praestare conamen industriae exhibere aliquod

aliquod potiùs, quam nullum. De maculis Solaribus obſervatis nihil dico, neque enim illarum Obſervationes potuerunt ad uſum pro re noſtra conferri. Neque licuit, ob nimiam vicinitatem ſignatorum punctorum, ſemitam Veneris delineare.

10. Quanquam ſi aliquis (cùm habebit aliorum Obſervationes, quarum nullam adhuc ego vidi) dubius haereat, an eorum qui plùs, an eorum qui minùs in hoc phaenomeno certis quibuſdam rebus tribuerint opiniones ſequatur, illi fortaſſe nonnullum ad uſum ea eſſe poterunt. Quod ſi accidat; benè mecum actum exiſtimabo. Sin minùs; id ſaltem conſequar, ut Epiſtola haec omnibus cùm meam quoquo modo ~~poſſim rei~~ Aſtronomicae Studioſos juvandi voluntatem, tum meum praeſertim erga Te, Vir Celeberrime, amorem, ac obſervantiam teſtetur. Vale.

Patavii. Id. Iun. CIↃIↃCCLXI.